

1. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3$ 의 값은?

- ① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140 \end{aligned}$$

2. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$

- ① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
 $3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

3. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

- ① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right) \\ &= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66 \end{aligned}$$

4. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = a\sqrt{2} + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots\} \\ &+ \{(\sqrt{49} - \sqrt{50})\} \\ &= -(1 - \sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - 1 \\ &\text{따라서, } a = 5, b = -1 \text{ 에서 } a + b = 4 \end{aligned}$$

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \\&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\&= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

6. 다음 수열의 □안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \dots$

- ① $\frac{4}{21}$
- ② $\frac{8}{21}$
- ③ $\frac{10}{21}$
- ④ $\frac{14}{21}$
- ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

균으로 나눠 보면
 $\frac{1}{1}/\frac{1}{3}, \frac{2}{2}/\frac{3}{1}, \frac{1}{5}/\frac{2}{4}, \frac{3}{3}/\frac{4}{2}, \frac{5}{1}/$
따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.
 $\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$

7. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=60$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은?

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=60 \text{ 에서 } \sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_k+1)=60$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=60\cdots\cdots\textcircled{\tiny{A}}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20 \text{ 에서 } \sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k+1)=20$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=20\cdots\cdots\textcircled{\tiny{B}}$$

$\textcircled{\tiny{A}}-\textcircled{\tiny{B}}$ 을 계산하면

$$4\sum_{k=1}^{10}a_k=40 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

8. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3(n=2, 3, 4, \dots) \\ n=1 \text{ 일 때, } a_1 &= 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \\ \text{따라서 } a_n &= 4n - 3(n=1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^5 (2k+2)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

9. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

- ① $\frac{40}{7}$
- ② $\frac{45}{8}$
- ③ $\frac{17}{3}$
- ④ $\frac{57}{10}$
- ⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$$\begin{aligned} f(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 옳므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(x)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

10. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 = 291$$

11. 수열 1, 5, 11, 19, 29, ... 의 일반항 a_n 은?

① $n^2 + n + 1$

② $n^2 + n - 1$

③ $n^2 + n - 2$

④ $n^2 - n + 1$

⑤ $n^2 - n - 1$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 5, 11, 19, 29, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} & \vee & \vee & \vee & \vee & & \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & \rightarrow b_n = 2n + 2 \end{array}$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 2)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= n^2 + n - 1$$

12. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, ...에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
...	...	34	33	32	31

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61,...

1, 4, 15, 34, 61, ..., a_{10}

∨ ∨ ∨ ∨ ∨

3, 11, 19, 61, ..., b_9

이므로 $b_k = 3 + (k - 1)8 = 8k - 5$

$$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^9 (8k - 5) = 1 + 8 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

13. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때,
 $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} & 30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29}) \\ &= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29}) \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30 \end{aligned}$$

14. 수열 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, ... 에서 13은 제 a 항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제 b 항이라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면
(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), (9, 9, 9, 9, 9), ...
이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.
6군까지의 항수가 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 이므로 제 7군의
첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.
따라서 $a + b = 22 + 28 = 50$

15. $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\}$ 을 n 에 관한 식으로 나타내면?

- ① $60(2^n - 1)$ ② $35(2^n - 1)$ ③ $20(2^n + 1)$
④ $20(2^n - 1)$ ⑤ $16(2^n - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{(k-2)(2^n - 1)}{2 - 1} \right\} \\ &= (2^n - 1) \sum_{k=1}^{10} (k-2) \\ &= (2^n - 1) \left(\frac{10 \times 11}{2} - 20 \right) = 35(2^n - 1) \end{aligned}$$

16. 수열 3, 5, 9, 17, 33, 65, ...의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $20^{20} + 19$

② $20^{20} + 39$

③ $20^{21} + 11$

④ $20^{21} + 18$

⑤ $20^{21} + 29$

해설

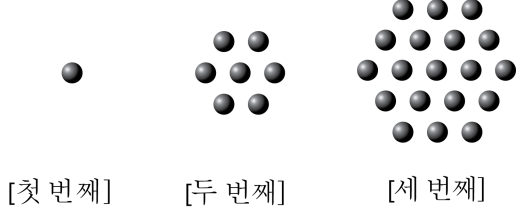
주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 3, 5, 9, 17, 33, 65, \dots$

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots \rightarrow b_n = 2^n$$

$$\therefore a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 3 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^{20} (2^k + 1) = \frac{2(2^{20} - 1)}{2 - 1} + 20 \\ &= 2^{21} + 18 \end{aligned}$$

17. 아래 그림과 같이 정육각형 모양이 되도록 배열한 바둑알의 개수를 육각형정수라 한다.
 예를 들면, 첫번째 육각형정수는 1이고, 두 번째 육각형정수는 7이다.
 이때, 10 번째 육각형 정수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 271

해설

바둑알의 개수를 차례로 나열한 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하고, 그 계차 수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\} : 1, 7, 19, 37, \dots$

$\{b_n\} : 6, 12, 18, \dots$

이때, $b_n = 6n$ 이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k$$

$$= 1 + 6 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= 3n^2 - 3n + 1$$

$$\therefore a_{10} = 300 - 30 + 1 = 271$$

18. n 이 자연수일 때, $n + (n - 1)2 + (n - 2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$ 의 값은?

- ① 2^{n+1}

② $2^{n+1} - n$

③ $2^{n+1} - n - 2$
- ④ $2^n + n2$

⑤ $2^n n + 2$

해설

주어진 식의 값을 S 라 하면
 $S = n + (n - 1)2 + (n - 2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$
 역급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{r} 2S = \quad n \cdot 2 \quad + (n-1)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ -) S = n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + \quad 2^{n-1} \\ \hline S = -n + \quad 2 + \quad 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \end{array}$$

$$\therefore S = -n + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - n - 2$$

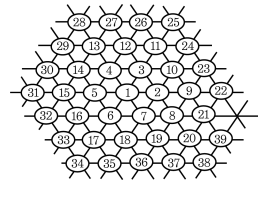
19. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}{2k+1}$ 의 값은?

- ㉠ $\frac{220}{3}$ ㉡ 110 ㉢ $\frac{440}{3}$ ㉣ $\frac{550}{3}$ ㉤ 220

해설

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{10} \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{10} k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{220}{3} \end{aligned}$$

20. 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형들이 그물 모양으로 서로 연결되어 있다. 다음 그림과 같은 규칙으로 1에서부터 출발하여 차례대로 꼭짓점에 수를 적어갈 때, 1이 적힌 꼭짓점에서 331이 적힌 꼭짓점까지의 거리는?



- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

1군 : 1
 2군 : 2, 3, 4, 5, 6, 7
 3군 : 8, 9, ..., 19
 4군 : 20, ..., 37이라 하고,
 n 군의 항의 개수를 구해 보자.
 1군 $\rightarrow$ 1개
 2군 $\rightarrow$ 6개 $= 6 \times 1$ 개
 3군 $\rightarrow$ 12개 $= 6 \times 2$ 개
 4군 $\rightarrow$ 18개 $= 6 \times 3$ 개
 $\vdots$
 n 군 $\rightarrow 6 \cdot (n - 1)$ 개
 331이 k 군에 있다 하면
 $(k - 1)$ 군까지의 항의 개수의 총합 < 331
 $1 + 6 \times 1 + \cdots + 6(k - 2) < 331$
 $\frac{(k - 1) \{1 + 6(k - 2)\}}{2} < 331$
 $(k - 1)(6k - 11) < 662$
 $k = 11$ 일 때 $(k - 1)(6k - 11) = 550$,
 $k = 12$ 일 때 $(k - 1)(6k - 11) = 671$
 이므로 $k = 11$
 즉 331은 11군에 있다.
 따라서 1이 적힌 꼭짓점까지의 거리 = 10