1. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$$
$$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$$

2. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

3. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$$

$$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10}$$

$$= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right)$$

$$= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$$

4. $\sum_{k=1}^{49} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$$

$$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$$

$$+\left\{(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$$

$$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

(준 식)$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

6. 다음 수열의 $\square$ 안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{1},\ \square,\ \square \cdots$$

① $\frac{4}{21}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{10}{21}$ ④ $\frac{14}{21}$ ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

군으로 나눠 보면

$$\frac{1}{1} / \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1} / \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{1} /$$

따라서 $\frac{1}{7},\ \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{3}=\frac{10}{21}$$

7. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=60$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=60$에서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_k+1)=60$
$\sum_{k=1}^{10}a_k^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=60\cdots\cdots$㉠
$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20$에서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k+1)=20$
$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=20\cdots\cdots$㉡
㉠- ㉡을 계산하면
$4\sum_{k=1}^{10}a_k=40$ $\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=10$

8. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

9. 함수 $f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{f(k)}$의 값은?

① $\dfrac{40}{7}$　② $\dfrac{45}{8}$　③ $\dfrac{17}{3}$　④ $\dfrac{57}{10}$　⑤ $\dfrac{63}{11}$

해설

$f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$=\sum_{k=1}^{20}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{f(x)}=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{20}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=6\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=6\times\dfrac{20}{21}=\dfrac{40}{7}$

10. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{100}{k}\right]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{100}{k}\right] = 100+50+33+25+20+16+14+12+11+10 =$ 291

11. 수열 1, 5, 11, 19, 29, $\cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① n^2+n+1 ② n^2+n-1 ③ n^2+n-2

④ n^2-n+1 ⑤ n^2-n-1

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{lccccccl} \{a_n\} : & 1, & 5, & 11, & 19, & 29, & \cdots & \\ & \vee & \vee & \vee & \vee & & & \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & & \rightarrow b_n = 2n+2 \end{array}$$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= n^2 + n - 1$$

12. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, $\cdots$ 에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
$\cdots$	$\cdots$	34	33	32	31

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 4, & 15, & 34, & 61, & \cdots, & a_{10} \\ \vee & \vee & \vee & \vee & & & \vee \\ & 3, & 11, & 19, & 61, & \cdots, & b_9 \end{array}$$

이므로 $b_k = 3 + (k-1)8 = 8k - 5$

$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9}(8k-5) = 1 + 8 \cdot \dfrac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

13. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 30

해설

$$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$$
$$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$$

14. 수열 $1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots$ 에서 13은 제 a항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제b항이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

$(1), (3,\ 3), (5,\ 5,\ 5), (7,\ 7,\ 7,\ 7), (9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9), \cdots$

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1+2+3+4+5+6=21$ 이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a+b=22+28=50$

15. $\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$을 n에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n-1)$ ② $35(2^n-1)$ ③ $20(2^n+1)$

④ $20(2^n-1)$ ⑤ $16(2^n-1)$

해설

$$\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{(k-2)(2^n-1)}{2-1}\right\}$$

$$=(2^n-1)\sum_{k=1}^{10}(k-2)$$

$$=(2^n-1)\left(\frac{10\times 11}{2}-20\right)=35(2^n-1)$$

16. 수열 3, 5, 9, 17, 33, 65, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $20^{20}+19$ ② $20^{20}+39$ ③ $20^{21}+11$

④ $20^{21}+18$ ⑤ $20^{21}+29$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\}$: 3, 5, 9, 17, 33, 65, $\cdots$

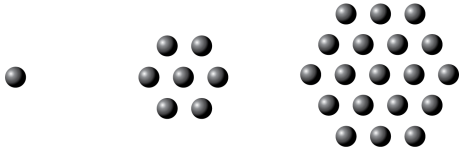
2, 4, 8, 16, 32, $\cdots \rightarrow b_n = 2^n$

$\therefore a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 3 + \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n + 1$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{20}(2^k+1) = \dfrac{2(2^{20}-1)}{2-1} + 20$

$= 2^{21} + 18$

17. 아래 그림과 같이 정육각형 모양이 되도록 배열한 바둑알의 개수를 육각형정수라 한다.
예를 들면, 첫번째 육각형정수는 1이고, 두 번째 육각형정수는 7이다.
이때, 10번째 육각형 정수를 구하여라.



[첫 번째]　　[두 번째]　　[세 번째]

▶ 답 :

▷ 정답 : 271

해설

바둑알의 개수를 차례로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 7,\ 19,\ 37,\ \cdots$

$\{b_n\} : 6,\ 12,\ 18,\ \cdots$

이때, $b_n = 6n$이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k$

$= 1 + 6 \times \dfrac{(n-1)n}{2}$

$= 3n^2 - 3n + 1$

$\therefore\ a_{10} = 300 - 30 + 1 = 271$

18. n이 자연수일 때, $n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$의 값은?

① 2^{n+1}

② $2^{n+1}-n$

③ $2^{n+1}-n-2$

④ 2^n+n2

⑤ $2^n n+2$

해설

주어진 식의 값을 S라 하면

$S=n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$

멱급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & 2S= & n\cdot 2+(n-1)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+2^n \\ -) & S= & n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2^{n-1} \\ \hline & S= & -n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \end{array}$$

$$\therefore S=-n+\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-n-2$$

19. $\sum_{k=1}^{10} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}$ 의 값은?

① $\dfrac{220}{3}$ ② 110 ③ $\dfrac{440}{3}$ ④ $\dfrac{550}{3}$ ⑤ 220

해설

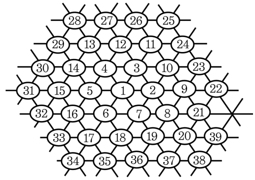
$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} k$$

$$=\frac{220}{3}$$

20. 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형들이 그물 모양으로 서로 연결되어 있다. 다음 그림과 같은 규칙으로 1에서부터 출발하여 차례대로 꼭짓점에 수를 적어갈 때, 1이 적힌 꼭짓점에서 331이 적힌 꼭짓점까지의 거리는?



① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

1군 : 1
2군 : 2, 3, 4, 5, 6, 7
3군 : 8, 9, $\cdots$, 19
4군 : 20, $\cdots\cdots\cdots$, 37이라 하고,
n군의 항의 개수를 구해 보자.
1군 → 1개
2군 → 6개 $= 6 \times 1$개
3군 → 12개 $= 6 \times 2$개
4군 → 18개 $= 6 \times 3$개
$\vdots$
n군 → $6 \cdot (n-1)$개
331이 k군에 있다 하면
$(k-1)$군까지의 항의 개수의 총합 < 331
$1 + 6 \times 1 + \cdots + 6(k-2) < 331$
$$\frac{(k-1)\{1+6(k-2)\}}{2} < 331$$
$(k-1)(6k-11) < 662$
$k = 11$일 때 $(k-1)(6k-11) = 550$,
$k = 12$일 때 $(k-1)(6k-11) = 671$
이므로 $k = 11$
즉 331은 11군에 있다.
따라서 1이 적힌 꼭짓점까지의 거리 $= 10$