

1. 수열 $1, -2, 3, -4, 5, \dots$ 의 11 번째 항은?

① -13

② -10

③ 11

④ -11

⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11 번째 항은 11 이다.

2. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

$$-1, 2, -3, 4, \dots$$

① $(-1)^{n+1} \times n$

② $n - (-1)^n$

③ $(-1)^n + n$

④ $(-1)^n \times n$

⑤ $\frac{1}{2} \{1 - (-1)^n\}$

해설

$$a_1 = -1 \cdot 1$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$$

$$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$$

$$a_4 = (-1)^4 \cdot 4 \text{ 이므로}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6 의 값은?

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$ (복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로
 $(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$ 에서

$$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. 등차수열 11, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 213$ 에서 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$b_1 = 2, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, b_{101} = a_{100},$$

$$b_{102} = 213$$

$$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$$

$$101d = 202$$

$$d = 2$$

5. 세 수 $-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

$-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 등차수열을 이루면 $5 + x$ 가 등차중항
이므로

$$2(5 + x) = -7 + 2x + 5 - 4x$$

$$4x = -12$$

$$\therefore x = -3$$

6. 첫째항이 -43 , 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8 항

② 제 9 항

③ 제 10 항

④ 제 11 항

⑤ 제 12 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -43 + (n - 1) \times 7 = 7n - 50$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$7n - 50 > 0, 7n > 50$$

$$\therefore n > \frac{50}{7} = 7.14\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

7. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$$\therefore a_{15} = 15 \times 16 = 240$$

8. 수열 $1, -10, 10^2, -10^4, \dots$ 은 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열이다.
이 때, $a + r$ 의 값은?

① -10

② -9

③ -8

④ -7

⑤ -6

해설

$$a = 1, r = -10$$

$$\therefore a + r = -9$$

9. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$ 이고, $a_2 = 4$ 일 때, a_5 의 값은?

① $\frac{11}{2}$

② 7

③ $\frac{19}{2}$

④ 12

⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r 이라고 하면

$$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2 \text{ 이므로}$$

$$1 : r^2 = 4 : 9 \text{ 에서}$$

$$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = a_1 r = 4 \text{ 에서 } \frac{3}{2} a_1 = 4 \quad \therefore a_1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{27}{2}$$

10. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{(\omega^2)^{36} - 1\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

11. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \text{등차수열}$$

① 공차가 2인 경우 (4가지)

2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10 4, 8, 12

12. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v, w, x, y, z 라 하면 $v < w < x < y < z$ 이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x 의 값은?

① 92°

② 108°

③ 112°

④ 121°

⑤ 138°

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540^\circ$ 이다.

또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면

d 를 공차로 생각하여 $x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$ 와 같이
표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면

$(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 540^\circ$ 이므로 $x = 108^\circ$
이다.

13. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 두 등차수열 $\{2a_n\}$, $\{3a_n + 2\}$ 의 공차의 합은?

①

10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2$$

수열 $\{2a_n\}$ 의 공차를 d_1 이라 하면

$$d_1 = 2a_{n+1} - 2a_n = 2(a_{n+1} - a_n) = 2 \times 2 = 4$$

수열 $\{3a_n + 2\}$ 의 공차를 d_2 이라 하면

$$d_2 = (3a_{n+1} + 2) - (3a_n + 2) = 3(a_{n+1} - a_n) = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore d_1 + d_2 = 4 + 6 = 10$$

14. 2와 $\frac{2}{3}$ 사이에 두 수 a, b 를 넣어서 만든 4개의 수 2, $a, b, \frac{2}{3}$ 가 이 순서로 조화수열을 이룰 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값은?

① $\frac{7}{4}$

② 2

③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

2, $a, b, \frac{2}{3}$ 가 조화수열을 이루므로 $\frac{1}{2}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{3}{2}$ 이 등차수열을 이룬다.

$$\text{따라서 } \frac{1}{a} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

15. 다음 조건을 만족하는 등차수열 $\{a_n\}$ 의 개수는? (단, $n \geq 3$)

㉠ $a_1 = 1$

㉡ 공차는 정수이다.

㉢ $a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n = 118$

㉠ 1

㉡ 2

㉢ 3

㉣ 4

㉤ 무수히 많다.

해설

$$S_n = \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2} = 118$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 236$$

$236 = 4 \times 59$ 이고 $n \geq 3$ 이므로

(i) $n = 4$ 일때

$$2 + (n-1)d = 59$$

$$2 + 3d = 59, d = 19$$

(ii) $n = 59$ 일때

$$2 + (n-1)d = 4$$

$$2 + 58d = 4$$

d 는 정수이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \{a_n\}$ 은 한 개

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 2n$ 일 때,
 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\ &= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\ &= -360 - (-80) = -280 \end{aligned}$$

17. 100이상 200이하의 자연수 중에서 3또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

18. 첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23

② 24

③ 25

④ 26

⑤ 27

해설

첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

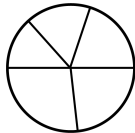
$$\frac{n\{2 \cdot 45 + (n-1) \cdot (-4)\}}{2} = n(47 - 2n)$$

$$n(47 - 2n) < 0 \text{에서 } n < 0 \text{ 또는 } n > \frac{47}{2}$$

$$n > 0 \text{이므로 } n > \frac{47}{2} = 23.5$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

19. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 라 하면

$$2(a - 2d) = a + 2d$$

$$2a - 4d = a + 2d$$

$$a = 6d$$

$$\therefore 4d, 5d, 6d, 7d, 8d$$

$$\text{그런데 } \frac{5(4d + 8d)}{2} = 15^2\pi$$

$$6d = 45\pi$$

$$d = \frac{15}{2}\pi$$

$$\therefore 8d = 8 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi$$

$$\therefore k = 60$$

20. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = x - 3$, $a_2 = x$, $a_3 = x + 6$ 이 성립할 때, a_5 의 값은?

① 16

② 24

③ 32

④ 48

⑤ 52

해설

x 는 $x - 3$ 과 $x + 6$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18$$

$$3x = 18 \therefore x = 6$$

즉, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

21. 세 양수 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{㉠} \quad a + b + c = \frac{7}{2}$$

$$\textcircled{㉡} \quad abc = 1$$

이때 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

$$\textcircled{1} \quad \frac{13}{4}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{15}{4}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{17}{4}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{19}{4}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{21}{4}$$

해설

공비를 r 라 하면 $a + b + c = a + ar + ar^2 = \frac{7}{2}$ 에서

$$a(1 + r + r^2) = \frac{7}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = 1$ 에서 $a^3 r^3 = (ar)^3 = 1$ 이고

a, r 는 실수이므로 $ar = 1 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$\frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{7}{2}, \quad 2r^2 + 2r + 2 = 7r, \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(r - 2)(2r - 1) = 0 \quad \therefore r = 2 \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{㉠}\text{에서 } a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 세 수는 2, 1, $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

22. 2와 162 사이에 세 양수 a, b, c 를 넣어 2, $a, b, c, 162$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루게 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$b^2 = 2 \times 162$$

$$b = 18 \quad (\because b > 0)$$

2, $a, 18, c, 162$ 가 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 2 \times 18$$

$$a = 6 \quad (\because a > 0)$$

$$c^2 = 18 \times 162$$

$$c = 54$$

$$\therefore a + b + c = 6 + 18 + 54 = 78$$

23. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{3n-1}$$

$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

24. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127

② 136

③ 148

④ 156

⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$= 96r^2 = 24$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$

25. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100 보다 크게 되는가?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{ 인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, 2^6 = 64 \text{ 이므로}$$

$$n = 6$$

26. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면

$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$S_n = n^2 + kn \text{ 이므로}$$

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$$

$$\log_3(T_n - 1) = n \text{ 에서 } T_n = 3^n + 1 \text{ 이므로}$$

$$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$$

$$= 28 - 10 = 18$$

$$\text{이때, } a_3 = b_3 \text{ 이므로 } k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$$

27. 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하는 기업이 있다. 지난 10년간 매출액의 증가율이 69%일 때, 처음 5년간 매출액의 증가율은?

① 13%

② 15%

③ 20%

④ 24%

⑤ 30%

해설

매년 매출액의 증가비율을 a 라 하자

$(1 + a)^{10} = 1.69$ 일 때

$$\begin{aligned}(1 + a)^5 &= \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2} \\ &= 1.3\end{aligned}$$

1.3배로 증가하였다.

따라서 증가율은 30%

28. 100 만원을 월이율 2%, 1 개월마다의 복리로 빌릴 때, 1 년 후에는 얼마를 갚아야 하는가?(단, $1.02^{12} = 1.2682$)

① 1258200 원

② 1268200 원

③ 1278200 원

④ 1288200 원

⑤ 1298200 원

해설

$$\begin{aligned} S &= 1000000(1 + 0.02)^{12} = 10^6 \times 1.02^{12} \\ &= 10^6 \times 1.2682 = 1268200(\text{원}) \end{aligned}$$

29. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

$$\begin{aligned} & 1 \text{ 년후 원리합계는 } 1000 \text{ 만} \times (1.04)^1 \\ & (10 \text{ 년후 원리합계}) \\ & = 1000 \text{ 만} \times 1.04^{10} \\ & = 1000 \text{ 만} \times 1.48 \\ & = 1480 \text{ 만 (원)} \end{aligned}$$

30. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $\log_3(S_n + 1) = n$ 을 만족할 때, a_3 의 값은?

① 6

② 10

③ 14

④ 18

⑤ 22

해설

$$3^n = S_n + 1$$

$$S_n = 3^n - 1$$

$$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$$

$$a_n = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \quad (n \geq 2)$$

$$= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1$$

$$= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

31. 수열 3, 33, 333, 3333, ... 의 일반항 a_n 을 구하여라.

① $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$

② $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)$

③ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

④ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

⑤ $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 2)$

해설

수열 9, 99, 999, 9999, ... 에서

$$9 = 10^1 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, 9999 = 10^4 - 1, \dots$$

따라서 이 수열의 일반항은 $10^n - 1$ 이다.

수열 3, 33, 333, 3333, ... 의 각 항은

$$3 = 9 \times \frac{1}{3}, 33 = 99 \times \frac{1}{3}, 333 = 999 \times \frac{1}{3}, \dots \text{이므로}$$

주어진 수열의 일반항은 $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ 이다.