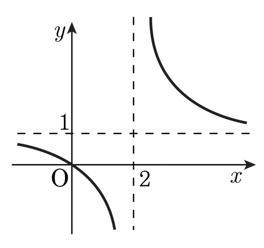
1. 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.
② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.
③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.
④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.
⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$
그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$이고
$y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.
따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

2. 함수 $y = \dfrac{ax-b}{-2x+c}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)



① 2　　② 1　　③ 0

④ 1　　⑤ −2

해설

분수함수 $y = \dfrac{ax-b}{-2x+c}$

$= \dfrac{ax-b}{-2\left(x-\dfrac{c}{2}\right)}$

$= \dfrac{\dfrac{ac}{2}-b}{-2\left(x-\dfrac{c}{2}\right)} - \dfrac{a}{2}$ 의 점근선의

방정식은 $x = \dfrac{c}{2},\ y = -\dfrac{a}{2}$ 이므로

$\dfrac{c}{2} = 2,\ \ -\dfrac{a}{2} = 1$

즉, $c = 4,\ a = -2$ 이므로 $y = \dfrac{-2x-b}{-2x+4}$

또한, 점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = \dfrac{-b}{4}\ \therefore b = 0$

$\therefore a+b+c = 2$

3. 유리함수 $y = \dfrac{ax-b}{x-2}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y = \dfrac{3x-1}{x+c}$ 의 그래프와 일치한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 8

해설

$y = \dfrac{ax-b}{x-2} \Rightarrow y-2 = \dfrac{a(x+3)-6}{(x+3)-2}$

$\Rightarrow y = \dfrac{ax+3a-b+2(x+1)}{x+1}$

$= \dfrac{(a+2)x+3a-b+2}{x+1}$

$\therefore c=1,\ a=1,\ b=6$

$\Rightarrow a+b+c=8$

4. 다음 함수의 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹치는 것은?

① $y = \frac{2x-1}{x-1}$　② $y = \frac{2x}{x-1}$　③ $y = \frac{2x+1}{x-1}$

④ $y = \frac{2x}{2x-1}$　⑤ $y = \frac{2x}{2x+1}$

해설

① $y = \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$

② $y = \frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

③ $y = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$

④ $y = \frac{2x-1+1}{2x-1} = 1 + \frac{1}{2x-1}$

⑤ $y = \frac{2x+1-1}{2x+1} = 1 - \frac{1}{2x+1}$

따라서, ① 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축, y 축 방향으로 각각 1, 2 만큼 평행이동시킨 것이다.

5. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $y = \frac{2x-5}{x-2}$
Ⅱ. $y = \frac{2}{x-1}$
Ⅲ. $y = \frac{3x+4}{x+1}$
Ⅳ. $y = \frac{2x}{x-1}$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅳ　③ Ⅱ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅲ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ

해설

$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

이므로 $y = \frac{k}{x-p} + q$

꼴로 정리 했을 때, $k = 2$ 이면
평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

Ⅰ. $y = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$
$\therefore k = -1$

Ⅱ. $y = \frac{2}{x-1}$ $\therefore k = 2$

Ⅲ. $y = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}$ $\therefore k = 1$

Ⅳ. $y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$ $\therefore k = 2$

6. 분수함수 $f(x)=\frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지날 때, $1 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

분수함수 $f(x)=\frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지나므로

$2a=\frac{a}{a-1}$, $2a^2-3a=0$, $a(2a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}(\because a \neq 0)$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2x}$ 이므로 $1 \le x \le 3$ 에서

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $f(1)=\frac{3}{2}$ 을 가진다.

7. 분수함수 $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + a$에 대하여 대칭일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

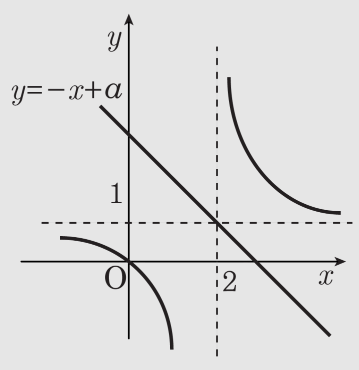
$y = \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{(x-2)+1}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} + 1$

즉, 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

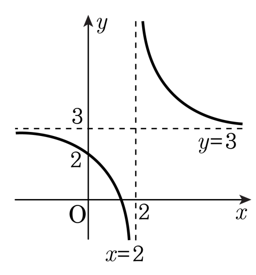
이 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭이 되려면 직선 $y = -x + a$ 가 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$ 을 지나야 하므로

$1 = -2 + a$

$\therefore\ a = 3$



8. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x = 2$, $y = 3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -6 ② -4 ③ -3

④ 2 ⑤ 7

해설

점근선이 $x = 2, y = 3$ 이므로 $a = 3, c = -2$

점$(0, 2)$를 지나므로 $\dfrac{b}{c} = 2$

$\therefore\ b = -4$

$\therefore a + b + c = -3$

9. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ 2+3+4=9$

10. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
$\therefore n - m = 1$

11. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

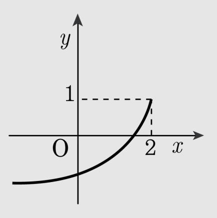
① 제 1사분면　　② 제 2사분면

③ 제 3사분면　　④ 제 1사분면, 제 2사분면

⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은
제 2사분면이다.

12. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

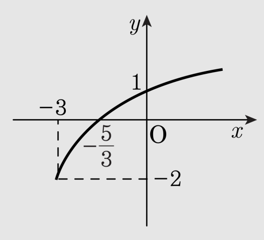
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

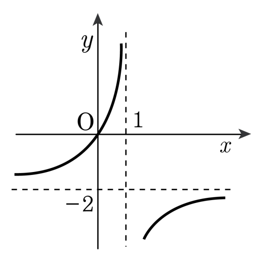
⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

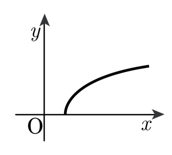
그림과 같으므로

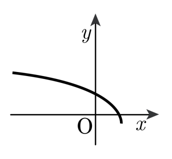
제4 사분면을 지나지 않는다.

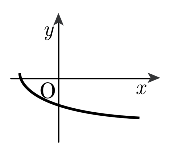


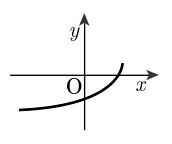
13. 함수 $y = \dfrac{bx+c}{ax-1}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형은?

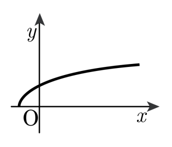


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

점근선이 $x=1$, $y=-2$ 이므로

$y = \dfrac{k}{x-1} - 2 \cdots$ ㉠

㉠이 원점을 지나므로 $(0,\ 0)$ 을 대입하면,

$\therefore k = -2$

$y = \dfrac{-2}{x-1} - 2 = \dfrac{-2x}{x-1}$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=0$

$\therefore y = \sqrt{ax+b}+c = \sqrt{x-2}$

따라서 개형은 ①이다.

14. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a = -1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

㉡ $a > 0$이면 치역은 $\{y|y \le 1\}$이다.

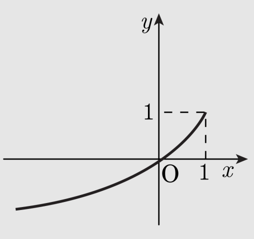
㉢ $a < 0$이면 치역은 $\{y|y \le 1\}$이다.

㉣ $y = \sqrt{x}+1$의 그래프와 만날 수 있다.

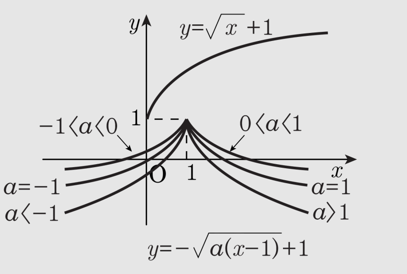
① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $a = -1$이면 주어진 무리함수는
$y = -\sqrt{-(x-1)}+1$
$y = -\sqrt{-x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,
y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \ge 0$이므로 치역은 $\{y|y \le 1\}$
㉣ $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x}+1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



15. 정의역이 $\{x \mid x \le 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

정의역은 $\left\{x \mid a(x-p) \ge 0\right\} = \{x \mid x \le 3\}$ 이므로 $a < 0,\ p = 3$

치역은 $\{y \mid y \ge 4\}$이므로 $q = 4$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$

이때, $f(1) = 6$이므로

$\sqrt{-2a} + 4 = 6,\ \sqrt{-2a} = 2$, $-2a = 4$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$

16. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$
② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$
③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$
④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$
⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y-2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$
또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x-1$
$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$
x와 y를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

17. 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}$의 최솟값을 구하면?

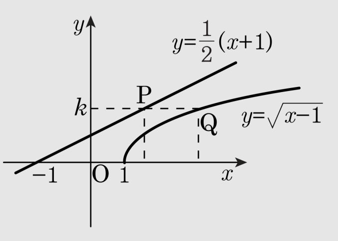
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$을 좌표평면 위에

나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서와 같이 점 P 의 y 좌표를 k 라 하면

① 점 P 의 x좌표는 $k=\frac{1}{2}(x+1)$ 에서

$x=2k-1$

② 점 Q 의 x좌표는 $k=\sqrt{x-1}$ 에서

$x=k^2+1$

$\therefore\ \overline{PQ}=|k^2+1-(2k-1)|$

$=|k^2-2k+2|$

$=|(k-1)^2+1|\geq 1$

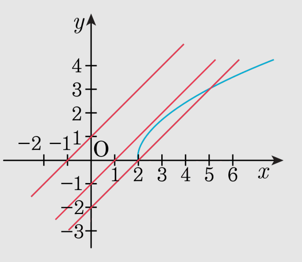
따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 1이다.

18. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x + k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k = -2$ 또는 $k > 1$　② $k = -1$ 또는 $k < -2$
③ $k = 1$ 또는 $k > 2$　④ $k = 2$ 또는 $k < -1$
⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k < -2$인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x + k$에서
$4x - 8 = x^2 + 2kx + k^2$
$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+8) = -4k - 4 = 0$에서 $k = -1$
따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

19. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2} < k < 2$ ② $\frac{3}{2} \le k < 2$ ③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $\frac{3}{2} < k \le 2$ ⑤ $1 \le k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x + k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

이것이 중근을 가지므로

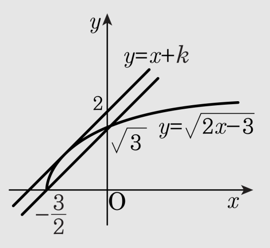
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2-3) = -2k + 4 = 0$

$\therefore\ k = 2$

(ii) 직선 $y = x + k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0 = -\frac{3}{2} + k$

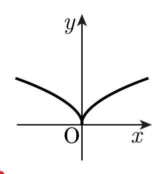
$\therefore\ k = \frac{3}{2}$

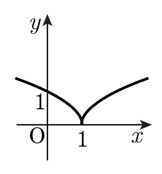


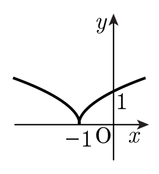
(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

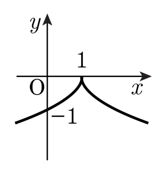
$\frac{3}{2} \le k < 2$

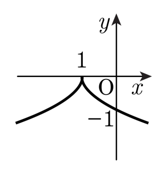
20. 다음 중 함수 $y=\sqrt{|x+1|}$ 의 그래프를 구하면?

①


②


③


④


⑤


해설

$x \geq -1$ 이면 $y=\sqrt{x+1}$
$x < -1$ 이면 $y=\sqrt{-x-1}$ 이므로
3번이 정답임.