1. 부등식 $y^2 \le x^2 \le 4 - y^2$ 을 만족하는 영역의 넓이는?

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π ④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

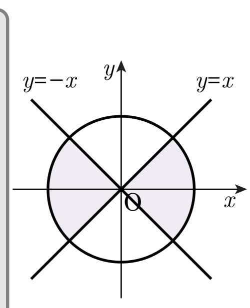
해설

$y^2 \le x^2 \le 4 - y^2$

$$\begin{cases} y^2 \le x^2 & \cdots ① \\ x^2 \le 4 - y^2 & \cdots ② \end{cases}$$

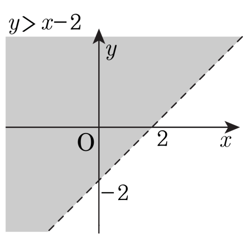
①, ②의 연립부등식의 영역을 그려보면, 다음 그림과 같고 $y = x$ 기울기의 각이 45^o 이므로 영역의 넓이는

$\therefore\ 2 \times \pi \times 2^2 \times \frac{90}{360} = 2\pi$

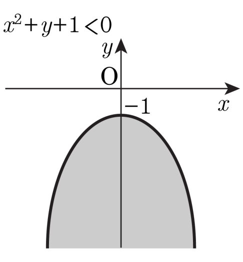


2. 다음 중 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?(단, 경계는 제외)

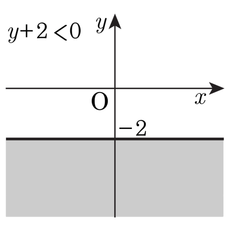
① $y > x-2$



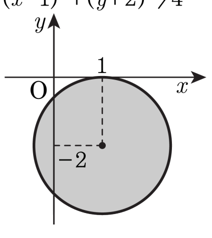
② $x^2+y+1<0$



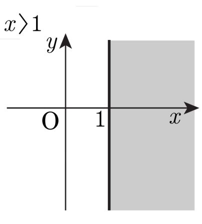
③ $y+2<0$



④ $(x-1)^2+(y+2)^2>4$



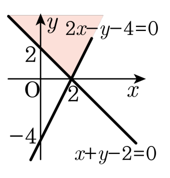
⑤ $x>1$

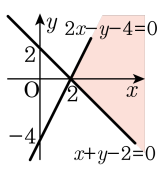


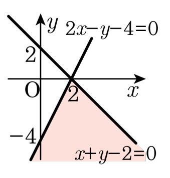
해설

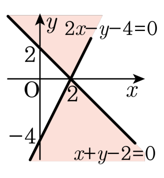
④번은 원의 외부를 도시해야 한다.

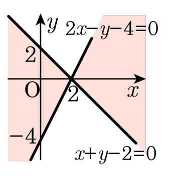
3. 부등식 $(x+y-2)(2x-y-4)<0$ 을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타낸 것은?

①


②


③


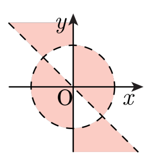
④


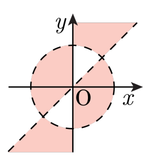
⑤


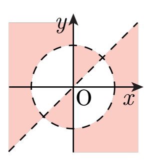
해설

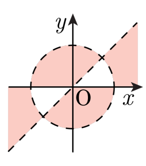
경계선 위에 있지 않은 임의의 점을 부등식 $(x+y-2)(2x-y-4)<0$ 에 대입해보면구하는 영역은 ④번과 같다.

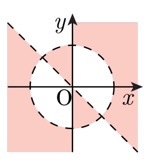
4. 부등식 $x(x+y)(x^2+y^2-4)>0$ 를 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면? (단, 경계선 제외)

①


②


③


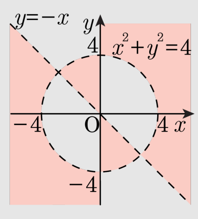
④


⑤


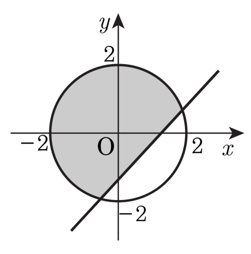
해설

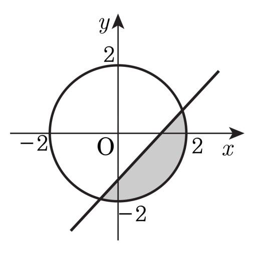
$x=0,\ x+y=0,\ x^2+y^2=4$ 의 그래프를 모두 그리고 각각의 영역의 경계선 위에 있지 않은 한 점 (5, 0) 을 부등식에 대입하면 $5\cdot(5+0)\cdot(5^2+0^2+4)>0$ 으로 부등식을 만족한다.

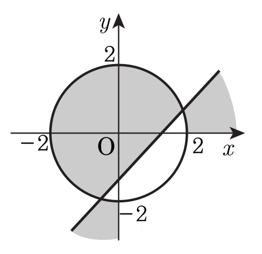
따라서 그림과 같이 점 (5, 0) 을 포함하는 영역과 이 영역과 인접하지 않은 영역이 부등식을 만족한다.

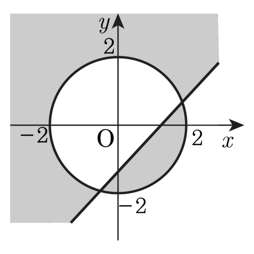


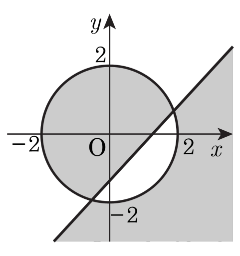
5. 부등식 $(x^2 + y^2 - 4)(x - y - 1) > 0$ 을 만족시키는 영역에 바르게 색칠한 것은? (단, 경계는 영역에 포함되지 않는다.)

①


②


③


④


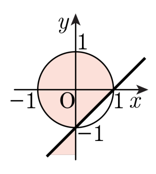
⑤


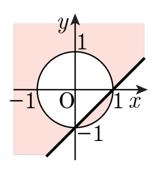
해설

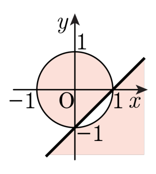
$x^2 + y^2 = 4, x - y - 1 = 0$ 이 주어진 영역의 경계를 나타내고,
점 $(0, 0)$ 을
$(x^2 + y^2 - 4)(x - y - 1) > 0$ 에 대입하면 부등식이 만족시키므로
주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ⑤와 같다.

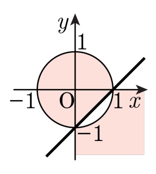
6. 다음 부등식의 영역을 그림으로 바르게 나타내어진 것은? (단, 경계선 제외)

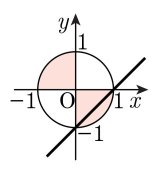
$$(y-x+1)(x^2+y^2-1)<0$$

①


②


③


④


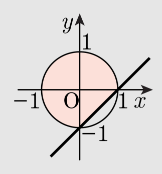
⑤


해설

$(y-x+1)(x^2+y^2-1)<0$

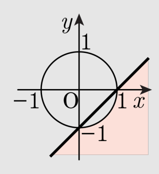
i) $y-x>0, \quad x^2+y^2-1<0$

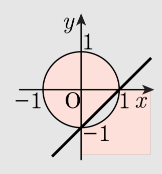
$\Rightarrow \quad y>x-1, \quad x^2+y^2<1$

$\Rightarrow$


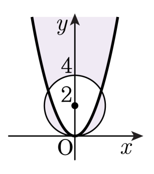
ii) $y-x+1<0, \quad x^2+y^2-1>0$

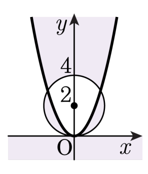
$\Rightarrow \quad y<x-1, \quad x^2+y^2>1$

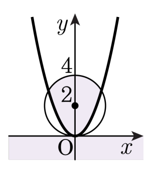
$\Rightarrow$


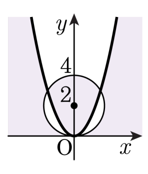
$\therefore$ i) + ii)


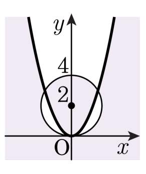
7. 부등식 $(x^2 - y)(x^2 + y^2 - 4y) \geq 0$ 을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면? (단, 경계선은 포함한다.)

①


②


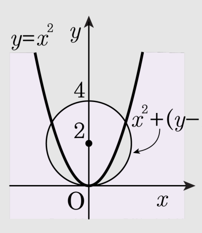
③


④


⑤


해설

$x^2 - y = 0$ 에서 $y = x^2 \quad \cdots$ ㉠
$x^2 + y^2 - 4y = 0$ 에서 $x^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 그래프를 그린 다음
경계선 ㉠, ㉡의 그래프 위에 있지 않은
점(0, 1) 을주어진 부등식에 대입하면,
$(-1) \cdot (-3) = 3 > 0$ 이므로
점 (0, 1) 은 주어진 부등식을 만족한다.
따라서 주어진 부등식의 영역은
점 (0, 1) 을 포함하는 영역과
그것에 이웃하지 않는 영역이다.
(단, 경계선 포함)

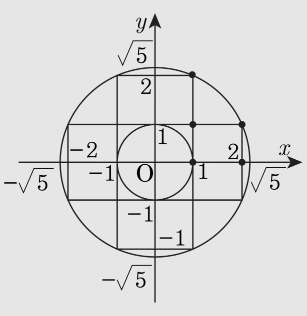


8. 부등식 $x^2 + y^2 \le 5$ 를 만족하는 정수의 쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 11 개　② 12 개　③ 16 개　④ 21 개　⑤ 24 개

해설

경계를 포함하여 반지름 1 인 원의 외부와 반지름 $\sqrt{5}$ 인 원의 내부 사이에 있는 격자점(x, y 좌표가 모두 정수인 점) 의 개수를 헤아려야 한다.



9. 세 부등식 $y \geq -x+3$, $y \leq x+3$, $x \leq 3$ 을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 12 개 ② 14 개 ③ 16 개 ④ 18 개 ⑤ 20 개

해설

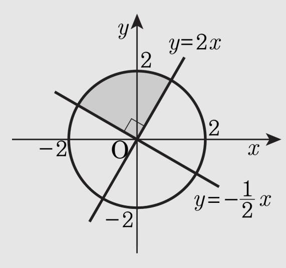
주어진 부등식을 만족하는 정수 x, y 의 값은
$x = 0$ 일 때, $y = 3$
$x = 1$ 일 때, $y = 2,\ 3,\ 4$
$x = 2$ 일 때, $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x = 3$ 일 때, $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 이므로
구하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는 16개

10. 연립부등식 $\begin{cases} y \geq 2x \\ y \geq -\dfrac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

① $\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

주어지는 연립부등식을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서, 구하는 영역의 넓이는 $4\pi \times \dfrac{1}{4} = \pi$

11. 연립부등식 $\begin{cases} y-\sqrt{3}\,|\,x\,|+1 \geq 0 \\ x^2+y^2+2y \leq 0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

① π ② $\dfrac{\pi}{2}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}$ ④ $\dfrac{\pi}{6}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{9}$

해설

$\begin{cases} y \geq \sqrt{3}\,|\,x\,|-1 \\ x^2+(y+1)^2 \leq 1 \end{cases}$

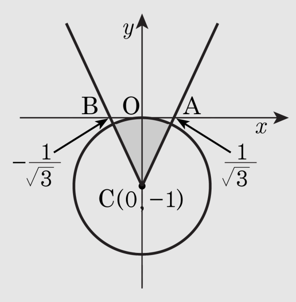
그림으로 나타내면 직선의 기울기가 $\pm\sqrt{3}$ 이므로

$\angle ACO = \angle BCO = 30°$

$\therefore\ \angle ACB = 60°$

원의 넓이는 π 이므로 구하는 영역의 넓이는

$\pi \times \dfrac{60°}{360°} = \dfrac{\pi}{6}$



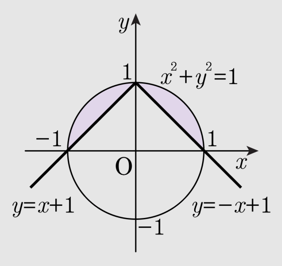
12. 좌표평면 위에서 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ |x| + y \ge 1 \end{cases}$$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

① $\dfrac{\pi - 1}{2}$ ② $\dfrac{\pi - 2}{2}$ ③ $\pi - 1$ ④ $\pi - 2$ ⑤ $\pi - 3$

해설

$x^2 + y^2 \le 1$은 $x^2 + y^2 = 1$의 내부,
$|x| + y \ge 1$은 $y \ge -|x| + 1$이므로
$y = -|x| + 1$의 윗부분이다.
$|x| + y \ge 1$에서
$x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad y \ge -x + 1$
$x < 0 \quad \Rightarrow \quad y \ge x + 1$이므로
연립부등식의 영역은 다음 그림과 같다. 따라서, 넓이는
$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2}$이다.

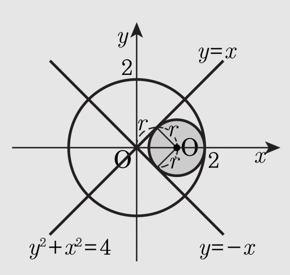


13. 세 부등식 $x+y \ge 0$, $x^2+y^2 \le 4$, $x-y \ge 0$ 을 동시에 만족시키는 영역에 포함되는 원 중 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이는?

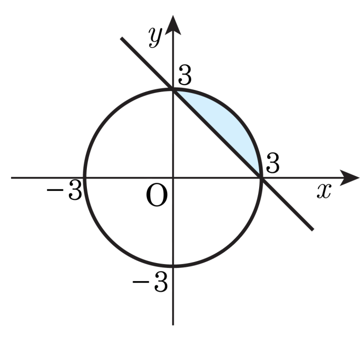
① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}-1$
④ $\sqrt{2}-1$　⑤ $2\sqrt{2}-2$

해설

그림에서 넓이가 최대가 되기 위한 원의 반지름의 길이를 r 이라 하면 $\overline{OO'} = r\sqrt{2}$ 이므로 $r\sqrt{2}+r=2$
따라서 $r(\sqrt{2}+1)=2$ 이므로
$r = \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2}-2$



14. 다음 그림의 어두운 부분을 연립부등식으로 바르게 나타낸 것은? (경계선 포함)



① $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge -x+3 \end{cases}$

② $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 9 \\ y \le -x+3 \end{cases}$

③ $(x^2+y^2-9)(x+y-3) \le 0$

④ $(x^2+y^2-9)(x+y-3) \ge 0$

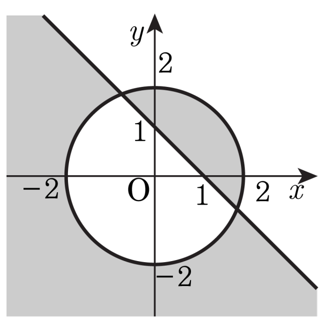
⑤ $(x^2+y^2-9)(x+y-3) < 0$

해설

$x^2+y^2=9$ 의 내부와 $y=-x+3$ 의 윗부분이므로

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge -x+3 \end{cases}$

15. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내는 영역을 부등식으로 나타낸 것은?(단, 경계선 포함)



① $\begin{cases} x+y-1>0 \\ x^2+y^2<4 \end{cases}$

② $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$

③ $(x+y-1)(x^2+y^2-4) \geq 0$

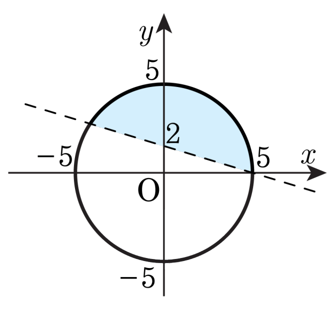
④ $(x+y-1)(x^2+y^2-4) < 0$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-4) \leq 0$

해설

$x+y-1=0, x^2+y^2=4$가 주어진 영역의 경계를 나타내고, 주어진 영역속의 점 $(-3, 0)$을 $(x+y-1)(x^2+y^2-4)$에 대입하면 0보다 작으므로 구하고자 하는 식은 $(x+y-1)(x^2+y^2-4) \leq 0$이다.

16. 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선 제외)



① $\begin{cases} 2x+5y>10 \\ x^2+y^2<5 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x+5y<10 \\ x^2+y^2<5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x+5y>10 \\ x^2+y^2>25 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2x+5y>10 \\ x^2+y^2<25 \end{cases}$

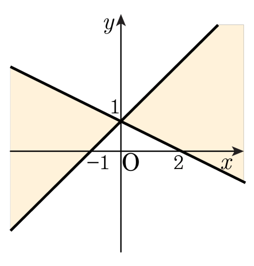
⑤ $\begin{cases} 2x+5y<10 \\ x^2+y^2<25 \end{cases}$

해설

$x^2+y^2=25$의 내부와 $2x+5y=10$의 위쪽이므로

$\begin{cases} 2x+5y>10 \\ x^2+y^2<25 \end{cases}$

17. 아래 그림의 어두운 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선은 포함한다.)



① $\{y \geq x\} + 1$

② $\{y \leq x\} + 1$

③ $(x - y + 1)(x + 2y - 2) \geq 0$

④ $(x - y + 1)(x + 2y - 2) \leq 0$

⑤ $(x + y + 1)(x + 2y + 2) \geq 0$

해설

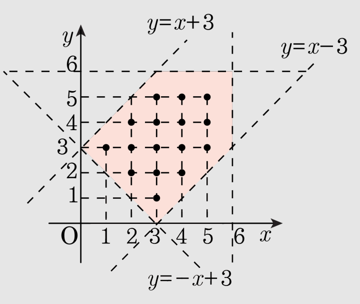
경계선인 두 직선의 방정식을 구하면
$x - y + 1 = 0,\ x + 2y - 2 = 0$ 이므로
구하는 부등식을
$(x - y + 1)(x + 2y - 2)\ \boxed{}\ 0 \cdots$ ㉠ 으로 놓는다.
이 때, 어두운 부분에 속해 있는 한 점 $(1,\ 1)$ 을 ㉠ 에 대입하면
$1 \cdot 1 > 0$ 이고 경계선을 포함하므로
$\boxed{}$ 안에 들어갈 부등호는 $\geq$ 이다.
$\therefore\ (x - y + 1)(x + 2y - 2) \geq 0$

18. 6보다 작은 두 양수 x, y에 대하여 세 수 $3,\ x,\ y$가 삼각형의 세 변의 길이가 될 때, 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 16 개

해설



$x,\ y$는 6보다 작은 양수이므로
$0 < x < 6,\ 0 < y < 6 \cdots\cdots$ ㉠
세 수 $3,\ x,\ y$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 다음 부등식을 모두 만족해야 한다.
$x + y > 3,\ x + 3 > y,\ y + 3 > x \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.
이때, 경계선은 제외한다.
따라서, 영역 안에 있는 자연수 $x,\ y$의 값은
$x = 1$일 때, $y = 3$
$x = 2$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4$
$x = 3$일 때, $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x = 4$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x = 5$일 때, $y = 3,\ 4,\ 5$이므로
순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $1 + 3 + 5 + 4 + 3 = 16$(개)

19. 좌표평면에서 부등식 $y \le -x^2+6x$를 만족하는 자연수 $x,\ y$ 를 좌표로 하는 점 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿ 개

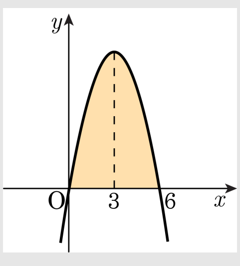
▷ 정답: 35 개

해설

$y \le -x^2+6x,\ y \le x(6-x)$

$x,\ y$ 가 자연수이므로 제1 사분면에 있는 점의 개수를 구하면 된다.

위 부등식의 영역 중에서 제1 사분면에 있는 영역을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$x=3$ 이 대칭축이므로,

ⅰ) $x=1,\ x=5$ 일 때,

$1 \le y \le 5$ 이므로 구하는 점은 5 개.

ⅱ) $x=2,\ x=4$ 일 때,

$1 \le y \le 8$ 이므로 구하는 점은 8 개.

ⅲ) $x=3$ 일 때,

$1 \le y \le 9$ 이므로 구하는 점은 9 개.

ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에 의해서 구하는 점은

$2 \times (5+8)+9=35$ (개) 이다.

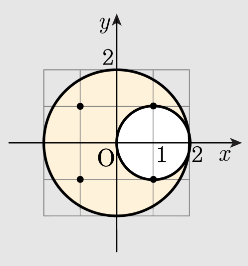
20. 부등식의 영역 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \ge 2x \end{cases}$ 를 만족시키는 점 (x, y) 중에서 x, y 둘 다 정수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ (x-1)^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$ 을 그려보면,



경계를 포함하므로 정수점을 구하면,
$(0,0), (0,1), (0,2), (-1,0), (-2,0), (0,-1)$
$(2,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (0,-2)$
총 12 개다.

21. 점 $(2, a)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4y = 16$ 의 내부에 있도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

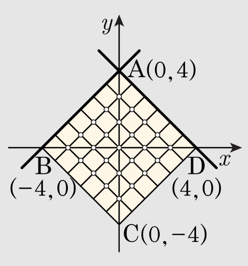
$x^2 + y^2 - 4y = 16$ 에서 $x^2 + (y-2)^2 = 20$
이 원의 내부를 나타내는 부등식은
$x^2 + (y-2)^2 < 20$
그런데, 점 $(2, a)$ 가 이 부등식의 영역에 포함되므로
$4 + (a-2)^2 < 20$, $a^2 - 4a - 12 < 0$ $(a+2)(a-6) < 0$
$\therefore \ -2 < a < 6$
따라서, 정수 a 는 $-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 5$ 의 7개이다.

22. 좌표평면 위에서 부등식 $|x|+|y|<4$ 을 만족시키는 영역에 속하는 점 중 이 영역의 경계를 이루는 두 선분 $x+y-4=0$, $x-y+4=0$ 과의 거리가 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 25 개

해설



부등식 $|x|+|y|<4$ 이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.
두 직선 $x+y-4=0$,
$x-y+4=0$ 이 서로 수직이므로,
위의 그림에서 □ABCD 는 한 변의 길이가
$4\sqrt{2}$ 인 정사각형이다.
점 $(-4,\ 0)$ 에서
직선 $x+y-4=0$ 까지의 거리가
$\frac{|-4-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ 이고,
$5<4\sqrt{2}=\sqrt{32}<6$ 이므로,
사각형의 내부에서 직선 $x+y-4=0$
(직선AD)까지의 거리가 자연수인 점은
거리가 1 인 점부터 거리가 5 인 점까지
5 가지 경우가 가능하다.
그 점들은 그림과 같은 점선 위에 있게 된다.
마찬가지로, 사각형의 내부에서
직선 $x-y+4=0$ (직선AB)까지의 거리가
자연수인 점은 거리가 1 인 점부터 거리가
5 인 점까지 5 가지 경우가 가능하다.
그 점들은 그림과 같은 점선 위에 있게 된다.
따라서 사각형의 내부에서 두 직선에 이르는 거리가 자연수인
점의 개수는 $5\times5=25$ 개이다.

23. 연립부등식 $\begin{cases} y-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|\,x\,| \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

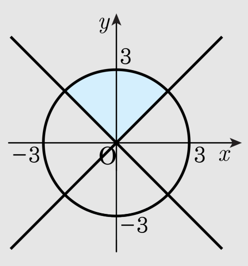
① $\dfrac{1}{2}\pi$ ② π ③ 2π ④ 3π ⑤ 4π

해설

주어진 부등식의 영역을 나타내보면,

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 구하면,



$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 의 기울기 각도는 $30°$ 이므로

반지름이 3 이고, 중심각이 $120°$ 인 부채꼴의 넓이를 구하면 된다.

$\Rightarrow \quad 3^2 \times \pi \times \dfrac{120}{360} = 3\pi$

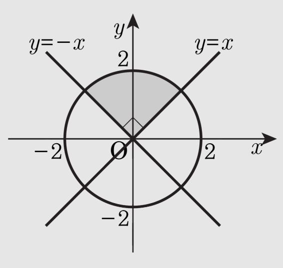
24. 다음 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

$$\begin{cases} y+x \geq 0 \\ y-x \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

① π　② 2π　③ 3π　④ 4π　⑤ 5π

해설

$y+x \geq 0$ 에서 $y \geq -x$ $\cdots$ ㉠
$y-x \geq 0$ 에서 $y \geq x$ $\cdots$ ㉡
$x^2+y^2 \leq 4$ $\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은 색칠된 부분이다.
따라서 구하는 영역의 넓이는 $\pi \times 2^2 \times \frac{1}{4} = \pi$



25. 두 부등식 $xy \geq 0$, $|\ x\ |+|\ y\ | \leq 4$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는?

① 8　　② 10　　③ 12　　④ 14　　⑤ 16

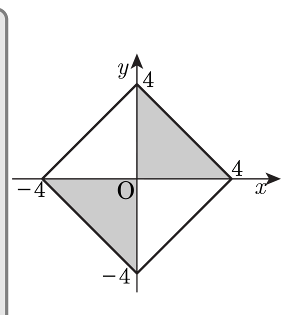
해설

$xy \geq 0 \ \Rightarrow\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 또는 $x \leq 0,\ y \leq 0$ 에서, 제1 사분면 또는 제3 사분면 $\cdots$ ㉠

$|\ x\ |+|\ y\ | \leq 4 \ \Rightarrow |\ x\ |+|\ y\ |= 4$ 가 나타내는 마름모의 내부 $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서,

$\therefore$ (넓이)$= 2 \times \left(\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) = 16$



26. A, B, C, D 중 넓이가 같은 것끼리 모은 것을 모두 고르면?
$A : |x+y| + |x-y| \le 6$
$B : |x-2005| + |x-2005| \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
$C : (x-y)(x^2+y^2-3) \le 0, |x|+|y| \le 3$
$D : |x| + 2|y| \le 3$

① A, B ② B, C ③ A, C, D
④ A, B, D ⑤ B, C, D

해설
A 의 넓이는 36, B 의 넓이는 9, C 의 넓이는 9, D 의 넓이는 9