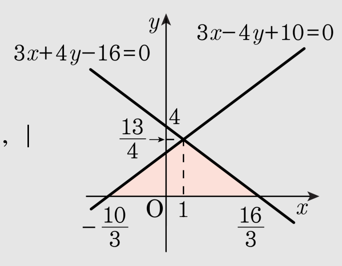
1. 좌표평면에서 세 부등식 $3x + 4y - 16 < 0$, $3x - 4y + 10 > 0$, $y > 0$ 을 동시에 만족시키는 영역에 속하는 점 중에서 이 영역의 경계를 이루는 세 선분과의 거리가 모두 자연수인 점의 개수는?

① 0 개　　② 1 개　　③ 3 개　　④ 5 개　　⑤ 7 개

해설



주어진 영역에 속하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면 각 직선에 이르는 거리는 각각 $\dfrac{|3a + 4b - 16|}{5}$, $\dfrac{|3a - 4b + 10|}{5}$, $|b|$ 이고,

b 가 $0 < b < \dfrac{13}{4}$ 인 모든 자연수이므로

$b = 1,\ 2,\ 3$

(i) $b = 1$ 일 때,

$3a + 4b - 16 < 0, 3a - 4 + 10 > 0$

$\therefore\ -6 < 3a < 12$

$\dfrac{|3a - 12|}{5}$, $\dfrac{|3a + 6|}{5}$ 은 자연수이고 이것을 만족하는 a 의 값은 없다.

(ii) $b = 2$ 일 때,

$3a - 8 < 0,\ 3a + 2 > 0$

$\therefore\ -2 < 3a < 8$

$\dfrac{|3a - 8|}{5}$, $\dfrac{|3a + 2|}{5}$ 은 자연수이고 이것을 만족하는 a 의 값은 1 이다.

(iii) $b = 3$ 일 때,

$3a - 4 < 0, 3a - 2 > 0$

$\therefore\ 2 < 3a < 4$

$\dfrac{|3a - 4|}{5}$, $\dfrac{|3a - 2|}{5}$ 은 자연수이고 이것을 만족하는 a 의 값은 없다.

따라서 조건을 만족하는 점은 $(1,\ 2)$ 이다.

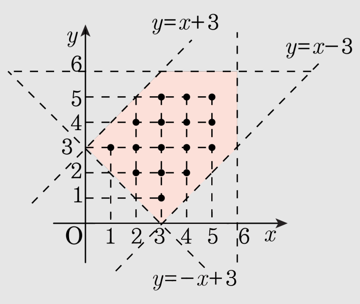
2. 6보다 작은 두 양수 x, y에 대하여 세 수 3, x, y가 삼각형의 세 변의 길이가 될 때, 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 16개

해설

x, y는 6보다 작은 양수이므로
$0 < x < 6,\ 0 < y < 6 \cdots\cdots$ ㉠
세 수 3, x, y가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 다음 부등식을 모두 만족해야 한다.
$x + y > 3,\ x + 3 > y,\ y + 3 > x \cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.
이때, 경계선은 제외한다.
따라서, 영역 안에 있는 자연수 x, y의 값은
$x = 1$일 때, $y = 3$
$x = 2$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4$
$x = 3$일 때, $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x = 4$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x = 5$일 때, $y = 3,\ 4,\ 5$이므로
순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $1 + 3 + 5 + 4 + 3 = 16$(개)

3. 세 부등식 $y \geq -x+3$, $y \leq x+3$, $x \leq 3$ 을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 12개　② 14개　③ 16개　④ 18개　⑤ 20개

해설

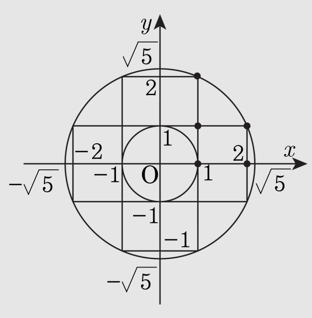
주어진 부등식을 만족하는 정수 x, y 의 값은
$x=0$ 일 때, $y=3$
$x=1$ 일 때, $y=2,\ 3,\ 4$
$x=2$ 일 때, $y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x=3$ 일 때, $y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 이므로
구하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는 16개

4. 부등식 $x^2 + y^2 \le 5$ 를 만족하는 정수의 쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 11 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 21 개 ⑤ 24 개

해설

경계를 포함하여 반지름 1 인 원의 외부와 반지름 $\sqrt{5}$ 인 원의 내부 사이에 있는 격자점 ($x,\ y$ 좌표가 모두 정수인 점) 의 개수를 헤아려야 한다.

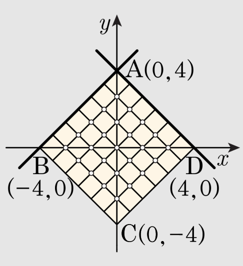


5. 좌표평면 위에서 부등식 $|x|+|y|<4$ 을 만족시키는 영역에 속하는 점 중 이 영역의 경계를 이루는 두 선분 $x+y-4=0$, $x-y+4=0$ 과의 거리가 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라

▶ 답: ____개

▷ 정답: 25개

해설



부등식 $|x|+|y|<4$ 이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.
두 직선 $x+y-4=0$,
$x-y+4=0$ 이 서로 수직이므로,
위의 그림에서 □ABCD 는 한 변의 길이가
$4\sqrt{2}$ 인 정사각형이다.
점 $(-4,\ 0)$ 에서
직선 $x+y-4=0$ 까지의 거리가
$\frac{|-4-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ 이고,
$5<4\sqrt{2}=\sqrt{32}<6$ 이므로,
사각형의 내부에서 직선 $x+y-4=0$ (직선AD)까지의 거리가 자연수인 점은
거리가 1 인 점부터 거리가 5 인 점까지
5 가지 경우가 가능하다.
그 점들은 그림과 같은 점선 위에 있게 된다.
마찬가지로, 사각형의 내부에서
직선 $x-y+4=0$ (직선AB)까지의 거리가
자연수인 점은 거리가 1 인 점부터 거리가
5 인 점까지 5 가지 경우가 가능하다.
그 점들은 그림과 같은 점선 위에 있게 된다.
따라서 사각형의 내부에서 두 직선에 이르는 거리가 자연수인 점의 개수는 $5\times5=25$ 개이다.

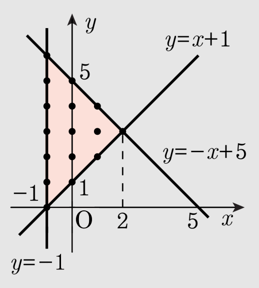
6. 세 부등식 $x \ge -1$, $y \le -x+5$, $y \ge x+1$을 모두 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 16 개

해설

세 부등식을 모두 만족하는 영역은
직선 $x=-1$의 오른쪽(경계선 포함),
직선 $y=-x+5$의 아랫부분(경계선 포함),
직선 $y=x+1$의 윗부분(경계선 포함)
의 공통 부분이므로
다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
16개이다.

7. 좌표평면에서 부등식 $y \le -x^2 + 6x$를 만족하는 자연수 $x,\ y$ 를 좌표로 하는 점 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

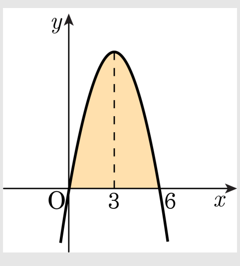
▷ 정답 : 35 개

해설

$y \le -x^2 + 6x,\ y \le x(6 - x)$

$x,\ y$ 가 자연수이므로 제1 사분면에 있는 점의 개수를 구하면 된다.

위 부등식의 영역 중에서 제1 사분면에 있는 영역을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$x = 3$ 이 대칭축이므로,

i) $x = 1,\ x = 5$ 일 때,

$1 \le y \le 5$ 이므로 구하는 점은 5 개.

ii) $x = 2,\ x = 4$ 일 때,

$1 \le y \le 8$ 이므로 구하는 점은 8 개.

iii) $x = 3$ 일 때,

$1 \le y \le 9$ 이므로 구하는 점은 9 개.

i), ii), iii) 에 의해서 구하는 점은

$2 \times (5 + 8) + 9 = 35$ (개) 이다.

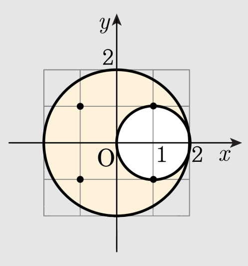
8. 부등식의 영역 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \ge 2x \end{cases}$ 를 만족시키는 점 (x, y) 중에서 x, y 둘 다 정수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ (x-1)^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$ 을 그려보면,



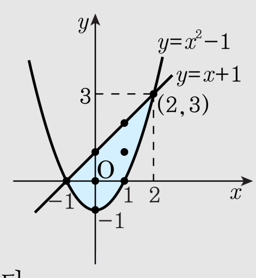
경계를 포함하므로 정수점을 구하면,
$(0,0), (0,1), (0,2), (-1,0), (-2,0), (0,-1)$
$(2,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (0,-2)$
총 12 개다.

9. 부등식 $x^2-2 \le y-1 \le x$ 를 만족하는 정수 $x,\ y$ 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설



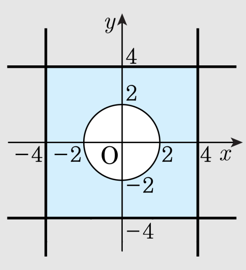
부등식 $x^2-2 \le y-1 \le x$,
즉 $x^2-1 \le y \le x+1$ 의 영역은
포물선 $y=x^2-1$ 의 경계를 포함한 윗 부분과
직선 $y=x+1$ 의 경계를 포함한 아랫 부분의 공통 부분이고,
이 영역에 포함되는 점 중 x 좌표, y 좌표가 모두 정수인 점의 좌표는 다음과 같다.
$(-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 3)$
따라서, 구하는 순서쌍은 8 개다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} |x| \le 4 \\ |y| \le 4 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$ 이 나타내는 영역에 속하며 x, y 의 좌표가 모두 정수인 점 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하면?

① 60 개 ② 66 개 ③ 72 개 ④ 80 개 ⑤ 84 개

해설

정사각형의 내부와 경계에 있는 점이
$9\times 9=81$ 개이고,
원의 내부에 있는 점이
$(-1,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(-1,\ 1)$, $(0,\ -1)$, $(0,\ 0)$,
$(0,\ 1)$, $(1,\ -1)$,
$(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$ 의 9 개이므로,
구하는 점의 개수는 $81-9=72$ (개)이다.



11. 점 $(2, a)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4y = 16$ 의 내부에 있도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

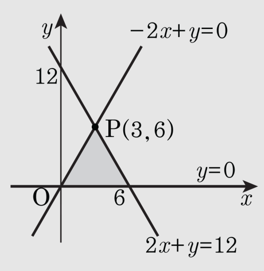
$x^2 + y^2 - 4y = 16$ 에서 $x^2 + (y-2)^2 = 20$
이 원의 내부를 나타내는 부등식은
$x^2 + (y-2)^2 < 20$
그런데, 점 $(2, a)$ 가 이 부등식의 영역에 포함되므로
$4 + (a-2)^2 < 20$, $a^2 - 4a - 12 < 0$ $(a+2)(a-6) < 0$
$\therefore \ -2 < a < 6$
따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$ 의 7개이다.

12. 세 부등식 $2x+y \le 12$, $-2x+y \le 0$, $y \ge 0$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설



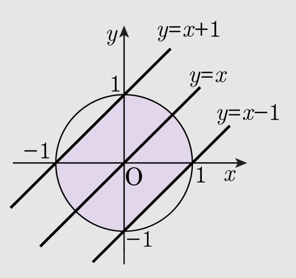
구하는 영역 $2x+y \le 12$,
$-2x+y \le 0$, $y \ge 0$은
세 직선으로 둘러싸인 빗금친 부분이다.
교점 P를 구하면
연립방정식
$-2x+y=0$, $2x+y=12$ 의 근이므로
$P(3,\ 6)$

구하는 면적은 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

13. $x^2+y^2 \le 1$인 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 부등식 $\max(x,\ y)+\max(-x,\ -y) \le 1$을 만족하는 영역의 넓이는? (단, $\max(a,\ b)$는 두 수 $a,\ b$중 작지 않은 수를 나타낸다.)

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{4}+1$ ③ $\frac{\pi}{2}-1$
④ $\frac{\pi}{2}+1$ ⑤ $\pi-1$

해설



$\max(x,\ y)+\max(-x,\ -y) \le 1$ ······㉠에서

(i) $x \ge y$일 때, $-x \le -y$이고
$\max(x,\ y)=x,\ \max(-x,\ -y)=-y$이므로
부등식 ㉠은 $x-y \le 1$, 즉, $y \ge x-1$

(ii) $x < y$일 때, $-x > -y$이고
$\max(x,\ y)=y,\ \max(-x,\ -y)=-x$이므로
부등식 ㉠은 $y-x \le 1$, 즉 $y \le x+1$

(i), (ii)로부터 부등식 ㉠을 만족하는 영역은
$x \ge y$일 때에는 직선 $y=x-1$의 윗부분(경계선 포함)이고,
$x < y$일 때에는 직선 $y=x+1$의 아랫부분(경계선 포함)이다.
따라서, 두 부등식 $x^2+y^2 \le 1$, $\max(x,\ y)+\max(-x,\ -y) \le 1$을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.
그러므로 구하는 넓이는

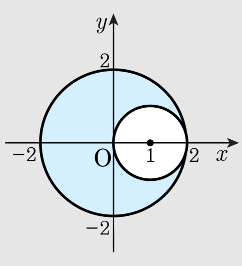
$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{2}+1$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ (x-1)^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 5π　　⑤ 7π

해설

$\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$



15. 부등식 $x^2+y^2-4x-4y+7\le 0$ 과 $|x-2|+|y-2|\ge 1$ 을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① $\pi-2$ ② $\pi+2$ ③ $2\pi-1$
④ 2π ⑤ $2\pi+1$

해설

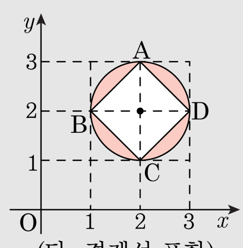
주어진 연립부등식에서

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\\|x-2|+|y-2|\ge 1\end{cases}$$

이때, 사각형 ABCD는 한변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이므로

구하는 영역의 넓이는

$1^2\cdot\pi-(\sqrt{2})^2=\pi-2$



(단, 경계선 포함)

16. 연립부등식 $y \le x-3,\ x^2+y^2 \le 9$ 을 만족하는 부분의 넓이를 구하면?

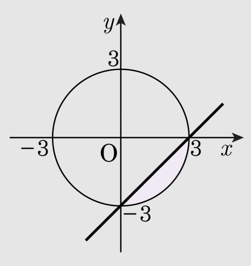
① $\dfrac{9\pi-18}{2}$　② $\dfrac{9\pi+8}{2}$　③ $\dfrac{9\pi-18}{4}$
④ $\dfrac{9\pi+18}{4}$　⑤ $\dfrac{9\pi}{4}$

해설

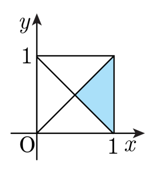
해당되는 영역을 도시해보면, 빗금 친 부분의 넓이를 구하면 된다.

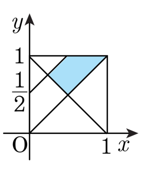
$\therefore \dfrac{1}{4} \times 3^2 \times \pi - \dfrac{1}{2} \times 3 \times 3$

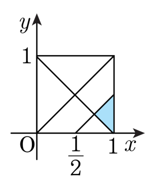
$= \dfrac{9\pi-18}{4}$

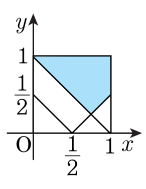


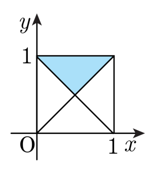
17. 세 변의 길이가 a, b , c $(a \ge b \ge c)$ 인 삼각형 T 를 변형하여 세 변의 길이가 $\frac{a}{2}$, b , c 인 삼각형을 만들 수 있는 T 의 집합을 S 라 하자. 세 변의 길이가 1 , x , y $(1 > x > y)$ 인 삼각형이 S 의 원소가 될 때, 점 (x, y) 가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 어둡게 나타내면? (단, 경계는 제외)

①


②


③


④


⑤


해설

삼각형 결정조건은 가장 긴 변이 다른 두변의 합보다 작아야 한다.

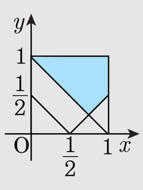
1) $1, x, y \Rightarrow 1 < x + y$

2) $\frac{1}{2}, \ x, \ y$

(i). $\frac{1}{2}$ 이 가장 긴 변 $\Rightarrow \frac{1}{2} < x + y$

(ii). x 가 가장 긴 변 $\Rightarrow x < \frac{1}{2} + y$

1), 2) 를 그려보면 색칠한 부분이 공통영역이 된다.



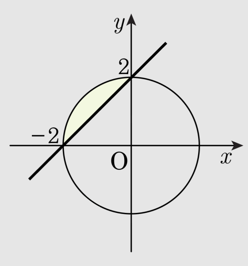
18. 연립부등식 $\begin{cases} y \geq x+2 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$ 의 영역의 넓이를 구하면?

① $\pi - 2$　　② $\pi + 2$　　③ $2\pi - 2$

④ $3\pi - 2$　　⑤ $3\pi + 2$

해설

영역을 도시하면 색칠한 부분과 같고,
그 넓이는
$\pi \times 2^2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2$
$= \pi - 2$



19. 좌표평면 위에서 부등식 $0 \le x+y \le 2$, $0 \le x-y \le 2$가 나타내는 영역과 같은 것을 고르면?

① $|x|+|y| \le 1$

② $|x-1|+|y| \le 1$

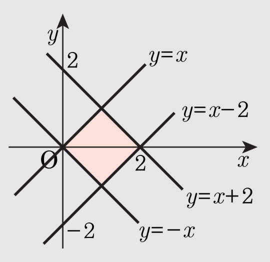
③ $|x|+|y-1| \le 1$

④ $|x-1|+|y-1| \le 1$

⑤ $|x+y| \le 1$

해설

부등식 $0 \le x+y \le 2$, $0 \le x-y \le 2$가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서, 이 영역은 $|x-1|+|y| \le 1$ 과 일치한다.

20. 다음 세 식을 동시에 만족하는 정수의 순서쌍의 개수를 구하면?

$A : [\sqrt{x^2+y^2}] = 2$, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수 $B : x^2 = y^2$ $C : xy > 0$이고 $x,\ y$는 정수

① 0개　　② 1개　　③ 2개　　④ 3개　　⑤ 4개

해설

A : $2 \le \sqrt{x^2+y^2} < 3$

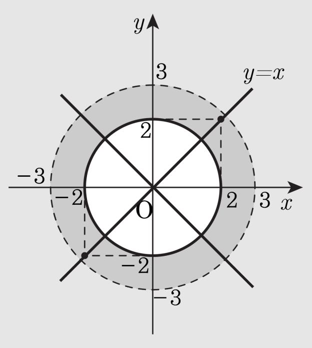
$\therefore 4 \le x^2+y^2 < 9$

B : $x=y$ 또는 $x=-y$

C : 1, 3 사분면의 격자점 ($x,\ y$ 좌표가 모두 정수인 점)

그림에서와 같이 세 식을 동시에 만족하는 점은

$(2,\ 2),\ (-2,-2)$ 의 2쌍



21. 두 부등식 $-x+2 < y < x$과 $y \le kx-k+1$을 동시에 만족시키는 영역이 존재하지 않기 위한 k 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

부등식 $-x+2<y<x$은 직선 $y=-x+2$ 의 위쪽과 직선 $y = x$ 의 아래쪽을 동시에 만족하는 영역으로 그림의 A 부분이다.
직선 $y=kx-k+1$ 는 $y=k(x-1)+1$ 이므로 k 의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$ 을 지난다.
부등식 $y \le kx-k+1$ 는 다음 그림과 같이 되어야 두 부등식을 동시에 만족시키는 영역이 존재하지 않는다
즉, 직선 $y=kx-k+1$ 의 기울기가 직선 $y=-x+2$ 의 기울기보다 작거나 같아야 하므로 $k \le -1$
$\therefore$ k 의 최댓값은 -1