1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{20}의 값은?

① 38 ② 39 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

해설

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$

$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$

$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$

$\therefore\ a_{20} = 439 - 398 = 41$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3,\ a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

$a_2,\ a_3,\ a_4$는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

3. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가) 에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $(가)=\frac{3}{2}$

4. 양수 x, y에 대하여 $\sqrt{2}+1$, x, $\sqrt{2}-1$, y가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x+y$의 값은?

① $-2\sqrt{2}$　② $1-2\sqrt{2}$　③ $4-2\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$　⑤ $4+2\sqrt{2}$

해설

x는 $\sqrt{2}+1$과 $\sqrt{2}-1$의 등비중항이므로
$x^2=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$이므로
$\therefore\ x=1\ (\because\ x>0)$
따라서 이 수열의 공비는 $\sqrt{2}-1$이므로
$y=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$
$\therefore\ x+y=4-\sqrt{2}$

5. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

7. 다음 중 옳은 것은?

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n}(3k-5)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

④ $4+5+6+\cdots+(n+3)=\sum_{k=1}^{n}(k+3)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

해설

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$
② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2n$
③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$
⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n-2}(k+2)$

8. 수열 $1\cdot2\cdot4,\ 2\cdot4\cdot8,\ 3\cdot6\cdot12,\ 4\cdot8\cdot16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400　② 1100　③ 12100
④ 24200　⑤ 48400

해설

$a_k = k\cdot 2k\cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 = 2\cdot 10^2\cdot 11^2 = 24200$

9. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$1, 4, 9, 16 \cdots$$

① n　　② $3n-2$　　③ $2n+1$

④ n^2　　⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

10. $a_5 = 31$, $a_{11} = 13$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 31$
$a_{11} = a + 10d = 13$
$6d = -18$
$d = -3$
$\therefore a = 31 + 4 \cdot 3 = 43$
$\therefore a_n = 43 + (n-1) \times (-3)$
$= -3n + 46$
$-3n + 46 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$46 < 3n$
$15.\times\times < n$
$\therefore n = 16$

11. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)
$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$
$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} - \frac{7(105 + 195)}{2}$
$= 47 \cdot 150$
$\therefore \ \frac{1}{150}S = 47$

12. 첫째 날에 100 원, 둘째 날에 110 원, 셋째 날에 120 원 $\cdots$ 과 같이 매일 10 원씩 늘려 30 일간 저금통에 넣으면 적립한 총액은?

① 6450 ② 7350 ③ 7450 ④ 8250 ⑤ 8450

해설

$a=100,\ d=10$

$S_{30}=\dfrac{30\left\{2\times 100+(30-1)\cdot 10\right\}}{2}=7350$

13. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10} = 48,\ S_{20} = 60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10} = \dfrac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 48 \cdots ㉠$

$S_{20} = \dfrac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = 60 \cdots ㉡$

㉡÷ ㉠을 하면

$\dfrac{r^{20} - 1}{r^{10} - 1} = \dfrac{5}{4},\ \dfrac{(r^{10} + 1)(r^{10} - 1)}{r^{10} - 1} = \dfrac{5}{4}$

$r^{10} + 1 = \dfrac{5}{4} \quad \therefore\ r^{10} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ S_n = \dfrac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} \cdot (r^{20} + r^{10} + 1)$

$= 48\left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} + 1\right) = 63$

14. 광이가 첫째 날에 2 원, 둘째 날에 6 원, 셋째 날에 18 원, $\cdots$ 과 같이 매일 전날의 3 배씩 30 일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30}-2$ 원 ② $3^{30}-1$ 원 ③ 3^{30} 원
④ $3^{30}+1$ 원 ⑤ $3^{30}+2$ 원

해설
전날의 3 배씩 모으므로 공비 $r=3$
$a=2,\ r=3$
$\therefore\ S_{30}=\dfrac{2\cdot(3^{30}-1)}{3-1}=3^{30}-1$

15. 수열 $1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① n^2+n+1　② n^2+n-1　③ n^2+n-2

④ n^2-n+1　⑤ n^2-n-1

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{lccccccl} \{a_n\} : & 1, & 5, & 11, & 19, & 29, & \cdots & \\ & \bigvee & \bigvee & \bigvee & \bigvee & & & \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & & \rightarrow b_n = 2n+2 \end{array}$$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$= 1 + 2 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$

$= n^2+n-1$

16. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, $\cdots$ 에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
$\cdots$	$\cdots$	34	33	32	31

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$

1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$, a_{10}

$\bigvee$ $\bigvee$ $\bigvee$ $\bigvee$ $\bigvee$

3, 11, 19, 61, $\cdots$, b_9

이므로 $b_k = 3 + (k-1)8 = 8k - 5$

$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9}(8k-5) = 1 + 8 \cdot \dfrac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

17. 다음은 네 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기 순으로 나열한 것이다.

1234	1243	$\cdots$	1423	1432
2134	2143	$\cdots$	2413	2431
3124	3142	$\cdots$	3412	3421
4123	4132	$\cdots$	4312	4321

위의 모든 수들의 총합은?

① 88880　② 77770　③ 66660
④ 55550　⑤ 44440

해설

처음 수와 마지막의 수의 합, 두 번째 수와 끝에서 두 번째 수의 합, $\cdots$ 이 모두 5555이고 나열된 네 자리 자연수는 모두 24개이므로 구하는 모든 수의 총합은 $5555 \times 12 = 66660$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_4 : a_7$는? (단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$　　② $1 : 3$　　③ $2 : 3$　　④ $2 : 5$　　⑤ $3 : 5$

해설

$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$

$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$

$2a + 5d = 4a + 2d$

$3d = 2a$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_4 : a_7 &= (a + 3d) : (a + 6d) \\ &= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

19. 첫째항이 31, 공차가 -2 인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220 인 모든 n 의 값의 합은?

① 10 ② 22 ③ 32 ④ 44 ⑤ 56

해설

$$S_n = \frac{n\left\{2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2)\right\}}{2}$$
$$= n\left\{31 - (n-1)\right\}$$
$$= n(32-n)$$
$$= -n^2 + 32n = 220$$

∴ n 의 값의 합은 32

20. 첫째항이 37, 공차가 -5 인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n항이 음수가 된다고 하면

$a_n = 37 + (n-1) \cdot (-5) < 0$

$-5n + 42 < 0,\ n > \frac{42}{5} = 8.4$

$\therefore\ n = 9,\ 10,\ 11, \cdots$

따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때

$a_8 = -5 \cdot 8 + 42 = 2$

$a_9 = -5 \cdot 9 + 42 = -3$

$a_{20} = -5 \cdot 20 + 42 = -58$

이므로 구하는 합은

$(37 + 32 + 27 + \cdots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \cdots + |-58|)$

$= \frac{8(37+2)}{2} + \frac{12(3+58)}{2} = 156 + 366 = 522$

21. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

22. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A=\dfrac{a+b}{2}$, $G=$ ㉠, $H=\dfrac{㉡}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \ge G \ge H$(단, 등호는 $a=b$일 때 성립), ㉢ $=G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$　　② (㉡) - ab

③ (㉢) - $A \times H$　　④ (㉣) - 등비중항

⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,
$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, $x=\dfrac{2ab}{a+b}$

23. p는 자연수이고 2^p-1은 소수일 때, 자연수 N을 $N=2^{p-1}(2^p-1)$이라 하자. N의 모든 양의 약수의 합은?

① $2^p(2^p-1)$　② $2^p(2^p+1)$
③ $(2^p-1)^2$　④ $(2^p+1)^2$
⑤ $(2^p+1)(2^p-1)$

해설

2와 2^p-1이 소수이므로 $N=2^{p-1}(2^p-1)$의
양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{p-1}$,
$(2^p-1),\ 2(2^p-1),\ 2^2(2^p-1),\ \cdots,\ 2^{p-1}(2^p-1)$이다.

이때, $1+2+2^2+\cdots+2^{p-1}=\dfrac{2^p-1}{2-1}=2^p-1$이고,

$(2^p-1)+2(2^p-1)+2^2(2^p-1)+\cdots+2^{p-1}(2^p-1)$

$=\dfrac{(2^p-1)(2^p-1)}{2-1}=(2^p-1)^2$

이므로 구하는 모든 양의 약수의 합은

$(2^p-1)+(2^p-1)^2=(2^p-1)(1+2^p-1)=2^p(2^p-1)$

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $a_2 = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$, $a_3 = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$, $\cdots$ 일 때,
$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수는?

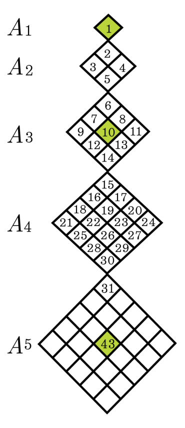
① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = -(1-\sqrt{2})$$
$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$
$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = -(\sqrt{3}-\sqrt{4})$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{a_n} = -(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$$
$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$
$$= -\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots\right\}$$
$$-\left\{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\right\}$$
$$= -1+\sqrt{n+1}$$

조건에서 $-1+\sqrt{n+1}$ 이 한 자리 자연수이므로
$1 \le -1+\sqrt{n+1} < 10$ 이 성립해야 한다.
즉, $2 \le \sqrt{n+1} < 11$ 을 만족하는 $n+1$ 의 값은
$2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \cdots,\ 10^2$ 이다.
따라서, 구하는 자연수 n 의 개수는 9 이다.

25. 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정사각형 1개, 4개, 9개, $\cdots$ 로 만들어진 도형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$ 이 이어져 있다. 각 정사각형에 자연수를 규칙적으로 적어 나갈 때, A_1, A_3, A_5, $\cdots$ 에는 정중앙(색칠한 부분)에 적힌 수가 있다. 예를 들면, A_3 의 정중앙에 적힌 수는 10이고, A_5 의 정중앙에 적힌 수는 43이다.
이때, A_9 의 정중앙에 적힌 수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 245

해설

A_8 의 마지막 수는

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$$

이므로 A_9 의 처음 수는 205이다.

A_9 의 마지막 수는

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 = 204 + 81 = 285$$

따라서 A_9 의 정중앙에 적힌 수는

$$\frac{205 + 285}{2} = \frac{490}{2} = 245$$