

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6 의 값은?

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$ (복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로
 $(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$ 에서

$$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

3. 조화수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ 의 일반항은?

① $2n - 1$

② $2n + 1$

③ $\frac{3}{n}$

④ $\frac{6}{n}$

⑤ $\frac{1}{2n + 1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3, 5, 7, 9, \dots$

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $2n + 1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{2n + 1}$

4. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $n \geq 3$ 일 때, $S_n = 94$ 를 만족하는 d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$S_n = 94 \text{에서 } \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2} = 94$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 n 의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$$n = 4 \text{일때, } 2 + (4-1)d = 47 \quad \therefore d = 15$$

$$n = 47 \text{일때, } 2 + (47-1)d = 4 \quad \therefore d = \frac{2}{23}$$

$$n = 94 \text{일때, } 2 + (94-1)d = 2 \quad \therefore d = 0$$

$$n = 188 \text{일때, } 2 + (188-1)d = 1 \quad \therefore d = -\frac{1}{187}$$

이 중에서 d 가 자연수가 되는 것은 $n = 4$ 이므로 $d = 15$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

6. 두 수 $2p+1$ 과 $2p+5$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p+1$, p^2 , $2p+5$ 가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$$2p^2 = 4p + 6, \quad p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p+1)(p-3) = 0$$

따라서 $p = -1$ 또는 $p = 3$

이때, p 는 양수이므로 $p = 3$

7. 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 20$ 일 때, $a_2 + a_8$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 을 차례로 $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 로 놓으면

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 5a = 20$$

$$\therefore a = 4$$

이때, $a_2 = a - 3d, a_8 = a + 3d$ 이므로

$$a_2 + a_8 = 2a = 8$$

8. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1$, $a_5 = b_7$, $b_{22} = 10$ 일 때, $a_k = 10$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

- ① 12 ② 14 ③ 15 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$ 의 공차를 x , $\{b_n\}$ 의 공차를 y 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)x$$

$$b_n = b_1 + (n-1)y$$

$$a_1 + 4x = b_1 + 6y$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x$$

$$b_{22} = b_1 + 21y = 10$$

$$a_k = a_1 + (k-1)x = 10$$

$$a_1 = b_1 \text{ 이므로 } a_1 = 10 - 21y$$

$$10 - 21y + (k-1)x = 10$$

$$y = \frac{2}{3}x \text{ 이므로}$$

$$10 - 14x + (k-1)x = 10$$

$$-14x + (k-1)x = 0$$

$$(k-15)x = 0$$

$$(i) \ x \neq 0 \text{ 일 때, } k = 15$$

$$(ii) \ x = 0 \text{ 일 때 } y = 0 \text{ 이므로 } b_{22} = \cdots = b_1 = 10$$

$$b_1 = a_1 \text{ 이므로 } a_1 = 10$$

그런데 $a_1 \neq 10$ 이 아니므로

$x = 0$ 이 될 수 없다.

$$\therefore k = 15$$

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

10. 등차수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 의 합이 2375가 되도록 하는 p, q 의 값은?

- ① $p = 11, q = 3$ ② $p = 12, q = 4$ ③ $p = 15, q = 3$
④ $p = 16, q = 4$ ⑤ $p = 17, q = 5$

해설

(i) 두 수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100$ 과 $100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 는 공차가 같은 등차수열이므로

$$100 = 85 + (p + 1)d, 105 = 100 + (q + 1)d$$

$$\frac{100 - 85}{p + 1} = \frac{105 - 100}{q + 1}$$

$$15(q + 1) = 5(p + 1) \quad \therefore p = 3q + 2$$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p + q + 3$ 인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\frac{(p + q + 3)(85 + 105)}{2} = 2375$

$$p + q + 3 = 25 \quad \therefore p + q = 22 \cdots \text{㉠}$$

이때, (i)에서 $p = 3q + 2$ 이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p = 17, q = 5$

11. 직각삼각형 ABC 의 세 변의 길이 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a:b:c$ 는? (단, $a < b < c$)

① $1:2:3$

② $2:4:6$

③ $3:4:5$

④ $3:5:7$

⑤ $3:6:9$

해설

세 수 a, b, c 가 등차수열을 이루므로 $2b = a + c \cdots \textcircled{1}$
한편, $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이고 c 가 가장 긴 변의 길이이므로

피타고라스의 정리에 의하여
 $a^2 + b^2 = c^2 \cdots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $b = \frac{a+c}{2}$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = c^2$$

$$4a^2 + a^2 + 2ac + c^2 = 4c^2$$

$$5a^2 + 2ac = 3c^2$$

$$(5a - 3c)(a + c) = 0$$

이때, $a > 0, c > 0$ 이므로

$$5a - 3c = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{5}c$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2b = \frac{3}{5}c + c = \frac{8}{5}c \quad \therefore b = \frac{4}{5}c$$

$$\text{따라서 } a:b:c = \frac{3}{5}c:\frac{4}{5}c:c = 3:4:5$$

12. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$$

(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 5$

$$(i), (ii) \text{에서} \begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

$$\therefore a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$$

$$= 5 + \frac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$$

$$2n^2 + 2n + 1 = 221 \text{에서 } n = 10 \text{ 또는 } n = -11$$

그런데 $n \geq 1$ 이므로 $n = 10$

13. 유한 등차수열 $\{a_n\}$ 과 무한 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여
 $\{a_n\} : 1, 4, 7, 10, \dots, 200$
 $\{b_n\} : 2, 7, 12, \dots$
일 때, 두 수열에 공통으로 포함된 수의 총합은?

- ① 1200 ② 1220 ③ 1231 ④ 1240 ⑤ 1261

해설

두 수열에 공통으로 포함된 가장 작은 수는 7 이고 두 수열의
일반항이 각각 $a_n = 3n - 2, b_n = 5n - 3$
이므로 두 수열에 공통으로 포함된 수는 적당한 자연수 p, q 에
대하여

$$3p - 2 = 5q - 3, 3p = 5q - 1$$

$$(1) q = 3k \rightarrow 5q - 1 = 15k - 1$$

$$(2) q = 3k + 1 \rightarrow 5q - 1 = 15k + 4$$

$$(3) q = 3k + 2 \rightarrow 5q - 1 = 15k + 9$$

따라서 새로운 수열을 c_n 이라 하면

$$c_n = 5q - 3 = 5(3n - 1) - 3 = 15n - 8$$

이 수열의 합은 $c_1 = 7, c_{13} = 15 \times 13 - 8 = 187$

즉, 첫째항이 7, 끝항이 187, 항수 13 인 등차수열의 합이므로

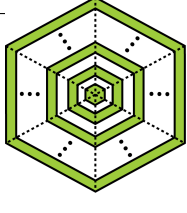
$$S_7 = \frac{13}{2} (7 + 187) = 1261$$

14. 유전 연구에 필요한 두 가지 식물 A, B를 재배하기 위하여 정육각형 모양의 토지를 다음과 같이 나누어 놓았다.

- 정육각형을 여섯 개의 정삼각형으로 나눈다.
 - 인접한 두 삼각형이 공유하고 있는 변(점선 부분)을 각각 21 등분한다.
 - 21 등분한 각 점을 직선 모양의 울타리로 서로 연결하여 모두 21 개의 부분으로 구분하여 놓는다.

~~오른쪽 그림과 같이 가장 안쪽에 있는 정육각형~~

모양의 토지부터 시작하여 검은 부분과 흰 부분으로 토지를 교대로 구분한 다음 검은 부분에는 A를 심고, 흰 부분에는 B를 심었다. A를 심은 부분의 넓이가 231 m² 일 때, B를 심은 부분의 넓이는?(단, 울타리가 차지하는 넓이는 고려하지 않는다.)



- ① 210 m²

② 212 m²

③ 214 m²
- ④ 216 m²

⑤ 218 m²

해설

가장 안쪽의 정육각형 모양의 토지의 넓이를 a 로 놓으면 인접한 흰 부분의 넓이는 $3a$ 이다.

또 인접한 검은 부분의 넓이는 $5a$ 이고, 이에 인접한 흰 부분의 넓이는 $7a$ 이다.

따라서 검은 부분의 넓이의 합은

$$a + 5a + 9a + \cdots + 41a = \frac{11(a + 41a)}{2} = 231a$$

흰 부분의 넓이의 합은

$$3a + 7a + 11a + \cdots + 39a = \frac{10(3a + 39a)}{2} = 210a$$

그런데 검은 부분의 넓이의 합이 231 이므로 구하는 부분의 넓이의 합은 210 이다.

15. 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

첫째항이 6이고, 공차가 5이므로 일반항은 a_n 은

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 11$$

$$-5n + 11 = -44$$

$$5n = 55 \quad \therefore n = 11$$