1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$(복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로

$(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$ 에서

$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore \ a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항

④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0,\ 3n > 28$

$$\therefore\ n > \frac{28}{3} = 9.33\cdots$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

3. 조화수열 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ 의 일반항은?

① $2n-1$ ② $2n+1$ ③ $\frac{3}{n}$

④ $\frac{6}{n}$ ⑤ $\frac{1}{2n+1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $2n+1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $\frac{1}{2n+1}$

4. 첫째항이 1 이고 공차가 자연수 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $n \geq 3$ 일 때, $S_n = 94$ 를 만족하는 d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$ 에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 n 의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$ 일때, $2+(4-1)d = 47 \quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$ 일때, $2+(47-1)d = 4 \quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$ 일때, $2+(94-1)d = 2 \quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$ 일때, $2+(188-1)d = 1 \quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d 가 자연수가 되는 것은 $n = 4$ 이므로 $d = 15$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} = 25 \times 8 = 200$$

6. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

7. 수열 $\{a_n\}$은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=20$일 때, a_2+a_8의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$을 차례로 $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$로 놓으면

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a=20$

$\therefore\ a=4$

이때, $a_2=a-3d,\ a_8=a+3d$이므로

$a_2+a_8=2a=8$

8. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1,\ a_5 = b_7,\ b_{22} = 10$일 때, $a_k = 10$을 만족시키는 양의 정수 k의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

① 12 ② 14 ③ 15 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$의 공차를 x, $\{b_n\}$의 공차를 y라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)x$

$b_n = b_1 + (n-1)y$

$a_1 + 4x = b_1 + 6y$

$\therefore y = \dfrac{2}{3}x$

$b_{22} = b_1 + 21y = 10$

$a_k = a_1 + (k-1)x = 10$

$a_1 = b_1$이므로 $a_1 = 10 - 21y$

$10 - 21y + (k-1)x = 10$

$y = \dfrac{2}{3}x$이므로

$10 - 14x + (k-1)x = 10$

$-14x + (k-1)x = 0$

$(k-15)x = 0$

(i) $x \neq 0$일 때, $k = 15$

(ii) $x = 0$일 때 $y = 0$이므로 $b_{22} = \cdots = b_1 = 10$

$b_1 = a_1$이므로 $a_1 = 10$

그런데 $a_1 \neq 10$이 아니므로

$x = 0$이 될 수 없다.

$\therefore k = 15$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

10. 등차수열 85, x_1, x_2, $x_3, \cdots$, x_p, 100, y_1, $y_2, \cdots$, y_q, 105의 합이 2375가 되도록 하는 p, q의 값은?

① $p=11,\ q=3$ ② $p=12,\ q=4$ ③ $p=15,\ q=3$

④ $p=16,\ q=4$ ⑤ $p=17,\ q=5$

해설

(i) 두 수열 85, x_1, x_2, $x_3, \cdots$, x_p, 100 과 100, y_1, $y_2, \cdots, y_q$, 105는 공차가 같은 등차수열이므로

$100 = 85 + (p+1)d,\ 105 = 100 + (q+1)d$

$$\frac{100-85}{p+1} = \frac{105-100}{q+1}$$

$15(q+1) = 5(p+1) \quad \therefore\ p = 3q+2$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\dfrac{(p+q+3)(85+105)}{2} =$ 2375

$p+q+3 = 25 \quad \therefore\ p+q = 22 \cdots$ ㉠

이때, (i)에서 $p=3q+2$이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면

$p=17,\ q=5$

11. 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a:b:c$는? (단, $a<b<c$)

① $1:2:3$ ② $2:4:6$ ③ $3:4:5$

④ $3:5:7$ ⑤ $3:6:9$

해설

세 수 a, b, c가 등차수열을 이루므로 $2b=a+c\cdots$㉠

한편, $\triangle \mathrm{ABC}$가 직각삼각형이고 c가 가장 긴 변의 길이이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$a^2+b^2=c^2\cdots$㉡

따라서 ㉠에서 $b=\dfrac{a+c}{2}$를 ㉡에 대입하면

$$a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=c^2$$

$$4a^2+a^2+2ac+c^2=4c^2$$

$$5a^2+2ac=3c^2$$

$$(5a-3c)(a+c)=0$$

이때, $a>0$, $c>0$이므로

$$5a-3c=0 \quad \therefore\ a=\frac{3}{5}c$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$2b=\frac{3}{5}c+c=\frac{8}{5}c \quad \therefore\ b=\frac{4}{5}c$$

따라서 $a:b:c=\dfrac{3}{5}c:\dfrac{4}{5}c:c=3:4:5$

12. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

13. 유한 등차수열 $\{a_n\}$과 무한 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$\{a_n\}: 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots,\ 200$

$\{b_n\}: 2,\ 7,\ 12,\ \cdots$

일 때, 두 수열에 공통으로 포함된 수의 총합은?

① 1200 ② 1220 ③ 1231 ④ 1240 ⑤ 1261

해설

두 수열에 공통으로 포함된 가장 작은 수는 7이고 두 수열의 일반항이 각각 $a_n = 3n-2,\ b_n = 5n-3$

이므로 두 수열에 공통으로 포함된 수는 적당한 자연수 $p,\ q$에 대하여

$3p-2 = 5q-3,\ 3p = 5q-1$

(1) $q = 3k \ \rightarrow\ 5q-1 = 15k-1$

(2) $q = 3k+1 \ \rightarrow\ 5q-1 = 15k+4$

(3) $q = 3k+2 \ \rightarrow\ 5q-1 = 15k+9$

따라서 새로운 수열을 c_n이라 하면

$c_n = 5q-3 = 5(3n-1)-3 = 15n-8$

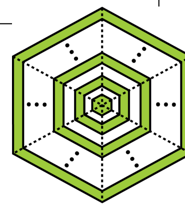
이 수열의 합은 $c_1 = 7,\ c_{13} = 15\times13-8 = 187$

즉, 첫째항이 7, 끝항이 187, 항수 13인 등차수열의 합이므로

$$S_7 = \frac{13}{2}(7+187) = 1261$$

14. 유전 연구에 필요한 두 가지 식물 A, B를 재배하기 위하여 정육각형 모양의 토지를 다음과 같이 나누어 놓았다.

· 정육각형을 여섯 개의 정삼각형으로 나눈다.
· 인접한 두 삼각형이 공유하고 있는 변(점선 부분)을 각각 21 등분한다.
· 21 등분한 각 점을 직선 모양의 울타리로 서로 연결하여 모두 21 개의 부분으로 구분하여 놓는다.



오른쪽 그림과 같이 가장 안쪽에 있는 정육각형 모양의 토지부터 시작하여 검은 부분과 흰 부분으로 토지를 교대로 구분한 다음 검은 부분에는 A를 심고, 흰 부분에는 B를 심었다. A를 심은 부분의 넓이가 $231\,\text{m}^2$ 일 때, B를 심은 부분의 넓이는?(단, 울타리가 차지하는 넓이는 고려하지 않는다.)

① $210\,\text{m}^2$ ② $212\,\text{m}^2$ ③ $214\,\text{m}^2$
④ $216\,\text{m}^2$ ⑤ $218\,\text{m}^2$

해설

가장 안쪽의 정육각형 모양의 토지의 넓이를 a로 놓으면 인접한 흰 부분의 넓이는 $3a$이다.
또 인접한 검은 부분의 넓이는 $5a$이고, 이에 인접한 흰 부분의 넓이는 $7a$이다.
따라서 검은 부분의 넓이의 합은

$$a+5a+9a+\cdots+41a=\frac{11(a+41a)}{2}=231a$$

흰 부분의 넓이의 합은

$$3a+7a+11a+\cdots+39a=\frac{10(3a+39a)}{2}=210a$$

그런데 검은 부분의 넓이의 합이 231 이므로 구하는 부분의 넓이의 합은 210 이다.

15. 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

첫째항이 6이고, 공차가 5이므로 일반항은 a_n은

$a_n = 6 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 11$

$-5n + 11 = -44$

$5n = 55 \quad \therefore \; n = 11$