

1. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

I. $y = \frac{2x-5}{x-2}$
II. $y = \frac{2}{x-1}$
III. $y = \frac{3x+4}{x+1}$
IV. $y = \frac{2x}{x-1}$

- ① I, II ② I, IV ③ II, IV
④ II, III ⑤ I, II, IV

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

이므로 $y = \frac{k}{x-p} + q$

꼴로 정리 했을 때, $k=2$ 이면
평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

I. $y = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$

$\therefore k = -1$

II. $y = \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$

III. $y = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1} \therefore k = 1$

IV. $y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$

2. 작년에 16만원하던 자전거와 4만원하던 헬멧이 올해는 각각 5%, 10%씩 인상되었다. 자전거와 헬멧을 한 세트로 보았을 때, 한 세트의 인상률은?

① 6% ② 7% ③ 7.5% ④ 8% ⑤ 15%

해설

지난해 자전거, 헬멧 한 세트의 가격은 $16 + 4 = 20$ 만원

올해 자전거는 $0.05 \times 16 = 0.8$, 즉 8천원 인상.

헬멧은 $0.10 \times 4 = 0.4$, 즉 4천원 인상.

한 세트에 1만 2천원 인상되었다.

따라서 전체의 인상률은 $\frac{1.2}{20} = \frac{6}{100} = 6(\%)$

3. $\sqrt{10 + \sqrt{96}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a + b + \frac{2}{a + b}$ 의 값을 구하면?

- ① $2\sqrt{6}$
- ② $\sqrt{6}$
- ③ $2 - \sqrt{6}$
- ④ $3 + \sqrt{6}$
- ⑤ $3 + \sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{10 + \sqrt{96}} &= \sqrt{10 + 2\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{4})^2} \\ &= \sqrt{6} + 2, 2 + \sqrt{6} = 4. \times \times \times \\ \therefore \text{정수 부분 } a : 4 \text{ 소수 부분 } b : &= \sqrt{6} - 2 \\ \Rightarrow a + b + \frac{2}{a + b} &= 2 + \sqrt{6} + \frac{2}{2 + \sqrt{6}} \\ &= \sqrt{6} + 2 + \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

4. $f(x, y) = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$ 일 때, $\frac{1}{f(1, 3)} + \frac{1}{f(3, 5)} + \dots + \frac{1}{f(47, 49)}$ 의 값은?

- ① 7 ② 5 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$f(x, y) = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

이므로

$$\text{준식} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{47} + \sqrt{49}}$$

이고

각 항의 분모를 유리화하면

$$\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \dots$$

$$+ \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{(\sqrt{49}+\sqrt{47})(\sqrt{49}-\sqrt{47})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}((\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{49}-\sqrt{47}))$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{49}-1) = 3$$

5. $0 < a < 1$ 이고 $x = a - \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2}$ 를 a 로 나타내면?

- ① $2a$ ② $\frac{2}{a}$ ③ $-\frac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} - \left|a - \frac{1}{a}\right| \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{1}{a}\right) = 2a\end{aligned}$$

6. 유리수 a, b, c 에 대하여 $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} &= 1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \text{ 에서} \\ a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6} &= \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \therefore a &= \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{4} \\ \therefore a+b+c &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

7. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$$y = \frac{ax+5}{bx+c} \text{에서}$$

$$\text{점근선 } x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

$(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{a+5}{b+c}$$

$$2c = -b, 3a = -b, c = -3$$

$$\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

$$y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$\therefore g(0) = \frac{5}{2}$$

8. 실수 x, y 가 $1 \leq y \leq \sqrt{x-1} + 1$ 을 만족시킬 때, $\frac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$1 \leq y \leq \sqrt{x-1} + 1$ 을 만족시키는 영역은
 다음 그림의 색칠된 부분 (경계선 포함)과 같다.

$\frac{y-2}{x+1} = k$ (k 는 상수) 로 놓으면
 $y - 2 = k(x + 1) \cdots \textcircled{1}$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.
 (i) $\textcircled{1}$ 이 함수
 $y = \sqrt{x-1} + 1$ 의 그래프에 접할 때,
 $kx + k + 2 = \sqrt{x-1} + 1$ 에서 $kx + k + 1 = \sqrt{x-1}$

양변을 제곱하여 정리하면
 $k^2 x^2 + (2k^2 + 2k - 1)x + k^2 + 2k + 2 = 0$,
 $D = 0$ 이므로 $8k^2 + 4k - 1 = 0$
 $\therefore k = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$ ($\because k > 0$)
 (ii) $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지난다 때, $-1 = k \cdot 2$
 $\therefore k = -\frac{1}{2}$
 (i), (ii) 에서 $\frac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$,
 최솟값 $b = -\frac{1}{2}$ 이므로
 $\therefore 2a - b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. a 가 실수일 때, $f(a) = \sqrt{(a + \sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a - \sqrt{a^2})^2}$ 을 간단히 하면?

- ① a ② $2a$ ③ $-a$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$ 이므로 $f(a) = |a + |a|| - |a - |a||$
 $a \geq 0$ 인 경우와 $a < 0$ 인 경우로 나누어 생각하면
(i) $a \geq 0$ 일 때,
 $f(a) = |a + a| - |a - a| = |2a| = 2a$
(ii) $a < 0$ 일 때,
 $f(a) = |a - a| - |a - (-a)| = -|2a| = 2a$
따라서 모든 실수 a 에 대하여 $f(a) = 2a$

10. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

11. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

12. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$