

1. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

$$\text{I. } y = \frac{2x-5}{x-2}$$

$$\text{II. } y = \frac{x-1}{2}$$

$$\text{III. } y = \frac{3x+4}{x+1}$$

$$\text{IV. } y = \frac{2x}{x-1}$$

① I, II

② I, IV

③ II, IV

④ II, III

⑤ I, II, IV

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{이므로 } y = \frac{k}{x-p} + q$$

꼴로 정리 했을 때, $k = 2$ 이면

평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

$$\text{I. } y = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$\therefore k = -1$$

$$\text{II. } y = \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$$

$$\text{III. } y = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1} \therefore k = 1$$

$$\text{IV. } y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$$

2. 작년에 16만원하던 자전거와 4만원하던 헬멧이 올해는 각각 5%, 10%씩 인상되었다. 자전거와 헬멧을 한 세트로 보았을 때, 한 세트의 인상률은?

- ① 6% ② 7% ③ 7.5% ④ 8% ⑤ 15%

해설

지난해 자전거, 헬멧 한 세트의 가격은 $16 + 4 = 20$ 만원
올해 자전거는 $0.05 \times 16 = 0.8$, 즉 8천원 인상.

헬멧은 $0.10 \times 4 = 0.4$, 즉 4천원 인상.

한 세트에 1만 2천원 인상되었다.

따라서 전체의 인상률은 $\frac{1.2}{20} = \frac{6}{100} = 6(\%)$

3. $\sqrt{10 + \sqrt{96}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a + b + \frac{2}{a + b}$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$

② $\sqrt{6}$

③ $2 - \sqrt{6}$

④ $3 + \sqrt{6}$

⑤ $3 + \sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{10 + \sqrt{96}} = \sqrt{10 + 2\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{4})^2}$$

$$= \sqrt{6} + 2, 2 + \sqrt{6} = 4. \times \times \times$$

$$\therefore \text{정수 부분 } a : 4 \text{ 소수 부분 } b : = \sqrt{6} - 2$$

$$\Rightarrow a + b + \frac{2}{a + b} = 2 + \sqrt{6} + \frac{2}{2 + \sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{6} + 2 + \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

4. $f(x, y) = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$ 일 때, $\frac{1}{f(1, 3)} + \frac{1}{f(3, 5)} + \cdots + \frac{1}{f(47, 49)}$ 의 값은?

① 7

② 5

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$f(x, y) = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ 이므로}$$

$$\text{준식} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{47} + \sqrt{49}} \text{ 이고}$$

각 항의 분모를 유리화하면

$$\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \cdots$$

$$+ \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{(\sqrt{49}+\sqrt{47})(\sqrt{49}-\sqrt{47})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{49}-\sqrt{47}) \}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{49}-1) = 3$$

5. $0 < a < 1$ 이고 $x = a - \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2}$ 를 a 로 나타내면?

① $2a$

② $\frac{2}{a}$

③ $-\frac{2}{a}$

④ $-2a$

⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} - \left|a - \frac{1}{a}\right| \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{1}{a}\right) = 2a\end{aligned}$$

6. 유리수 a, b, c 에 대하여 $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ 에서}$$

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore a + b + c = \frac{1}{2}$$

7. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ 3

④ 4

⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$$y = \frac{ax+5}{bx+c} \text{ 에서}$$

$$\text{점근선 } x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

$(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{a+5}{b+c}$$

$$2c = -b, 3a = -b, c = -3$$

$$\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

$$y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$\therefore g(0) = \frac{5}{2}$$

8. 실수 x, y 가 $1 \leq y \leq \sqrt{x-1} + 1$ 을 만족시킬 때, $\frac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ 1

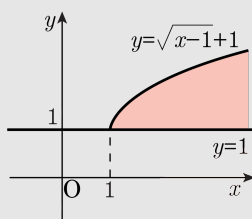
④ $\sqrt{3}$

⑤ 2

해설

$1 \leq y \leq \sqrt{x-1} + 1$ 을 만족시키는 영역은

다음 그림의 색칠된 부분 (경계선 포함) 과 같다.



$$\frac{y-2}{x+1} = k (k \text{ 는 상수}) \text{ 로 놓으면}$$

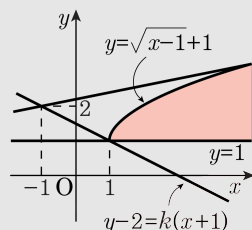
$$y - 2 = k(x + 1) \cdots \textcircled{1} \text{ 이므로}$$

①은 k 의 값에 관계없이 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

(i) ①이 함수

$$y = \sqrt{x-1} + 1 \text{ 의 그래프에 접할 때,}$$

$$kx + k + 2 = \sqrt{x-1} + 1 \text{ 에서 } kx + k + 1 = \sqrt{x-1}$$



양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 x^2 + (2k^2 + 2k - 1)x + k^2 + 2k + 2 = 0,$$

$$D = 0 \text{ 이므로 } 8k^2 + 4k - 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} (\because k > 0)$$

(ii) ①이 점 $(1, 1)$ 을 지날 때, $-1 = k \cdot 2$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

(i), (ii) 에서 $\frac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$,

최솟값 $b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\therefore 2a - b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. a 가 실수일 때, $f(a) = \sqrt{(a + \sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a - \sqrt{a^2})^2}$ 을 간단히 하면?

① a

② $2a$

③ $-a$

④ $-2a$

⑤ 0

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$ 이므로 $f(a) = |a + |a|| - |a - |a||$

$a \geq 0$ 인 경우와 $a < 0$ 인 경우로 나누어 생각하면

(i) $a \geq 0$ 일 때,

$$f(a) = |a + a| - |a - a| = |2a| = 2a$$

(ii) $a < 0$ 일 때,

$$f(a) = |a - a| - |a - (-a)| = -|2a| = 2a$$

따라서 모든 실수 a 에 대하여 $f(a) = 2a$

10. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$$\therefore a=-1, b=2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

11. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

12. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다.
이때, $m - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$