1. $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{11}$ ③ $\dfrac{1}{110}$ ④ $\dfrac{1}{111}$ ⑤ $\dfrac{1}{1010}$

해설

$\dfrac{1}{10\cdot 11}=\dfrac{1}{110}$

2. 수열 $1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ \cdots$ 의 100번째 항은?

① -199 ② -99 ③ -59 ④ 99 ⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n-1)$

$\therefore\ a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$

3. 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $3n-2$ ② $3n-1$ ③ $3n$
④ $3n+1$ ⑤ $3n+3$

해설

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

4. 다음 등차수열의 제 20항을 구하여라.

131, 137, 143, 149, 155, 161, $\cdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 245

해설

주어진 등차수열의 제 1항을 a, 공차를 d라고 하자.
$a = 131$, $d = 137 - 131 = 6$이므로
$a_n = 131 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 125$
$\therefore\ a_{20} = 6 \cdot 20 + 125 = 245$

5. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다) 에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27　② 10, 23, 29　③ 11, 23, 27
④ 11, 23, 29　⑤ 12, 24, 29

해설

5 와 17 의 등차중항은 $\frac{5+17}{2}=11$, 이 수열의 공차는 6 이다.
따라서 (가), (나), (다) 에 들어갈 수는 11, 23, 29 이다.

6. 세 수 4, x, -6이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

x는 4와 -6의 등차중항이므로
$2x = 4 + (-6) = -2 \quad \therefore \ x = -1$

7. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

구하는 합을 $S_{17} = \frac{17\left\{2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4}\right\}}{2} = \frac{527}{4}$

8. 다음 (　　) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,\ (\quad),\cdots$

① $5-18i$　② $5-20i$　③ $5-24i$
④ $5-32i$　⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을
$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면
(단, $a_k,\ b_k$는 실수)
수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고
수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$이다.

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　② 8　③ 11　④ 13　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

10. 첫째항이 -43, 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8 항　② 제 9 항　③ 제 10 항
④ 제 11 항　⑤ 제 12 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$
이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은
$7n - 50 > 0$, $7n > 50$
$\therefore\ n > \frac{50}{7} = 7.14\cdots$
따라서 자연수 n의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

11. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64　② 80　③ 92　④ 100　⑤ 120

해설

$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$

12. 등차수열 $-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 21$ 에 대하여 x_4+x_5 의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21 은 제 9 항이므로

$21=-3+8d \quad \therefore\ d=3$

따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3 인 등차수열이고, $x_4,\ x_5$ 은 각각 제 5 항, 제 6 항이므로

$x_4=-3+(5-1)\cdot 3=9$

$x_5=-3+(6-1)\cdot 3=12$

따라서 x_4+x_5 은 21 이다.

13. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 공차가 각각 $2, 3$인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$
$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 3$
$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1) \cdot 5$
$\therefore$ 공차 $= 5$

14. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} - \frac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \ \frac{1}{150} S = 47$

15. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = -2n-2$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a=-1,\ d=2$
② $a=-1,\ d=-2$
③ $a=-2,\ d=-2$
④ $a=-4,\ d=-2$
⑤ $a=-4,\ d=2$

해설

$a_n = -2n-2$이므로
$a_1 = -2\cdot 1-2 = -4$,
$a_2 = -2\cdot 2-2 = -6$이므로
$d = a_2 - a_1 = -2$

16. 첫째항이 100이고, 공차가 -3인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

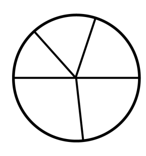
▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-3)$
$= -3n + 103 > 0$
$n < 34.333\cdots$
$\therefore n = 34$일 때 최대

17. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때 k의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$라 하면

$2(a-2d)=a+2d$

$2a-4d=a+2d$

$a=6d$

$\therefore 4d,\ 5d,\ 6d,\ 7d,\ 8d$

그런데 $\dfrac{5(4d+8d)}{2}=15^2\pi$

$6d=45\pi$

$d=\dfrac{15}{2}\pi$

$\therefore 8d=8\cdot\dfrac{15}{2}\pi=60\pi$

$\therefore k=60$

18. 다음과 같이 4와 109 사이에 k 개의 수를 나열하여 항의 개수가 $k+2$ 인 등차수열을 만들려고 한다. 공차가 1이 아닌 최소의 자연수일 때, k 의 값은?

$$4,\ \underbrace{\square,\ \square,\ \cdots,\ \square}_{k\text{개}},\ 109$$

① 26　　② 28　　③ 30　　④ 32　　⑤ 34

해설

$a_1 = 4$

$a_{k+2} = 4 + (k+1) \times d = 109$

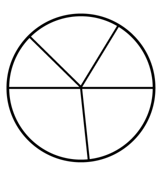
$4 + (k+1) \times d = 109$

$(k+1) \times d = 105$

$(k+1) \times d = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore d = 3,\ k+1 = 35 \quad \therefore k = 34$

19. 그림과 같이 반지름의 길이가 15 인 원을 5 개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2 배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때, k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

5 개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로
$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d(d>0)$ 라 하면
5 개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로
$5a = 15^2\pi \quad \therefore\ a = 45\pi$
또, 주어진 조건부으로부터
$a+2d = 2(a-2d)$ 에서 $d = \frac{a}{6} = \frac{15\pi}{2}$
따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는
$a+2d = 45\pi + 2\cdot\frac{15}{2}\pi = 60\pi \quad \therefore\ k = 60$

20. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p+q$의 값은?

① -43　② -33　③ -23　④ -13　⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면

$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$b_1 = q + 5$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면

$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$의 공차는 4,

$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$

$a_5 = p + 18,\ b_5 = 5 + 9q$

$p + 18 = 5 + 9q, \quad \therefore\ p = -31$

$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$