1. 함수 $y=\dfrac{2}{x+3}-4$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a,\ y=b$일 때, $a-b$의 값은?

① -7 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 7

해설

점근선이 $x=-3,\ y=-4$이므로 $a-b=1$

2. 분수함수 $y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1,\ y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

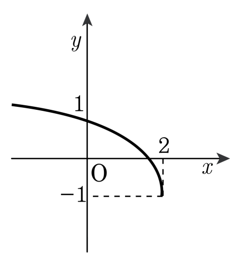
$y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1,\ y=6$ 이므로

$y=\dfrac{6(x-1)+9}{x-1}=\dfrac{9}{x-1}+6$

$\therefore\ a=-1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=5$

3. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?



① $y = \sqrt{-2x+4}-1$

② $y = \sqrt{-x+1}-1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4}+1$

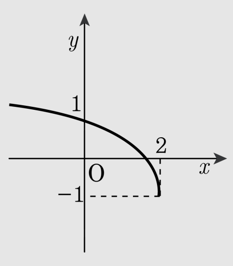
④ $y = \sqrt{x-1}-1$

⑤ $y = \sqrt{2x-4}+1$

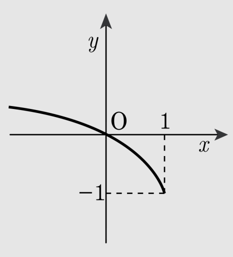
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

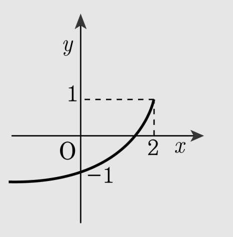
① $y = \sqrt{-2(x-2)}-1$



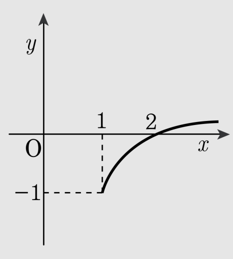
② $y = \sqrt{-(x-1)}-1$



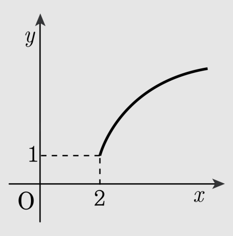
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)}+1$



④ $y = \sqrt{x-1}-1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)}+1$



4. 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+2$에서 $f^{-1}(4)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f(x)=\sqrt{x-1}+2$ 에서 $f^{-1}(4)=k$로 놓으면
$f(k)=4$
$\sqrt{k-1}+2=4,\ \sqrt{k-1}=2$
$k-1=4$에서 $k=5$
$\therefore\ f^{-1}(4)=5$

5. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $y = \dfrac{2x-5}{x-2}$
Ⅱ. $y = \dfrac{2}{x-1}$
Ⅲ. $y = \dfrac{3x+4}{x+1}$
Ⅳ. $y = \dfrac{2x}{x-1}$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅳ　③ Ⅱ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅲ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ

해설

$y = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

이므로 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$

꼴로 정리 했을 때, $k = 2$ 이면
평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

Ⅰ. $y = \dfrac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \dfrac{1}{x-2}$

$\therefore k = -1$

Ⅱ. $y = \dfrac{2}{x-1}$ $\therefore k = 2$

Ⅲ. $y = \dfrac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \dfrac{1}{x+1}$ $\therefore k = 1$

Ⅳ. $y = \dfrac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \dfrac{2}{x-1}$ $\therefore k = 2$

6. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y=\dfrac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y=\dfrac{1}{x}$ ② $y=\dfrac{2}{x}$ ③ $y=x+\dfrac{1}{x}$

④ $y=x+\dfrac{2}{x}$ ⑤ $y=2x+\dfrac{2}{x}$

해설

$2x^2=(x+1)(2x-2)+2$ 이므로

$y=\dfrac{2x^2}{x+1}=(2x-2)+\dfrac{2}{x+1}$

$=2(x+1)+\dfrac{2}{x+1}-4$

$\therefore\ y+4=2(x+1)+\dfrac{2}{x+1}$

이것은 $y=2x+\dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1, y축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

7. 함수$y = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점$(3, -2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$

$\Rightarrow -2 = 3a + b \cdots$ ①

또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3, -2)$ 을 지나므로

$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$

$\Rightarrow 3 = \dfrac{-2a+b}{-4}$

$\Rightarrow -2a + b = -12 \cdots$ ②

①, ② 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a + b = -6$

8. $y = \sqrt{4x-12}+5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a, y 축으로 b만큼 평행이동한 것이다.$a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축 방향으로 3만큼,
y 축 방향으로 5만큼 평행이동한
그래프의 함수이다.
즉, $a = 3,\ b = 5$
$\therefore\ a+b = 8$

9. $y=\sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha=3$, $\beta=5$
$\therefore\ \alpha+\beta=8$

10. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

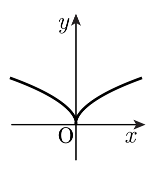
▶ 답 :

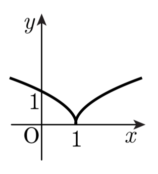
▷ 정답 : 6

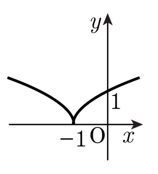
해설

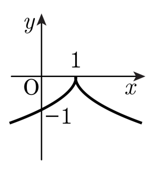
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

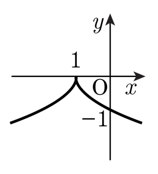
11. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

①


②


③


④


⑤


해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$
$x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로
3번이 정답임.

12. 점 $(0, 1)$을 지나고 점근선이 $x=-2,\ y=2$인 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 다음 중 어느 것을 평행이동한 것인가?

① $y=-\dfrac{1}{x}$　② $y=-\dfrac{2}{x}$　③ $y=-\dfrac{3}{x}$
④ $y=\dfrac{1}{x}$　⑤ $y=\dfrac{2}{x}$

해설

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 점근선이 $x=-2,\ y=2$이므로

$y=\dfrac{k}{(x+2)}+2$로 놓을 수 있고

이것이 점$(0, 1)$를 지나므로

$1=\dfrac{k}{2}+2$

$\therefore\ k=-2$

따라서 $y=\dfrac{-2}{x+2}+2$이므로

이 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로

-2만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

13. 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g\cdot f)(x)=x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(g\circ f)(x)=x$

$\Rightarrow\quad g(f(x))=x$

$\Rightarrow\quad g\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)=x$

$\therefore\quad g(1)$ 을 구하려면, $\dfrac{x+2}{2x-1}=1$ 이 되어야 한다.

$\Rightarrow\quad x=3\quad\therefore\quad g(1)=3$

14. 두 집합 $A = \left\{(x,\ y) \,\middle|\, y = \dfrac{2x+4}{x+1},\ 0 \le x \le 1\right\}$, $B = \{(x,\ y) \mid y = m(x+2)\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$ 이 성립하는 상수 m 의 값의 범위는?

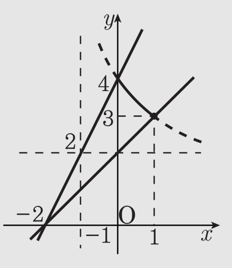
① $-1 \le m < 2$ ② $m \le 0, m \ge 2$ ③ $1 \le m \le 2$
④ $-1 \le m \le 1$ ⑤ $m < 1, m \ge 3$

해설

$y = \dfrac{2x+4}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+2}{x+1}$

$= \dfrac{2}{x+1} + 2$ 이므로

집합 A 가 나타내는 영역은 그림과 같다.



$y = m(x+2)$ 에서 집합 B 는
점 $(-2,\ 0)$ 을 지나는 직선들의 모임이다.
이때, $A \cap B \neq \varnothing$ 이려면
두 집합이 나타내는 그래프가 만나야 하므로
직선 $y = m(x+2)$ 가 점 $(1,\ 3)$ 을 지날 때와
점 $(0,\ 4)$ 를 지날 때 사이에 존재해야 한다.
따라서, 구하는 m 의 범위는

$\dfrac{3-0}{1-(-2)} \le m \le \dfrac{4-0}{0-(-2)}$

$\therefore\ 1 \le m \le 2$

15. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

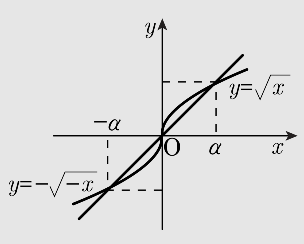
$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

16. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때,
세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0 이다.

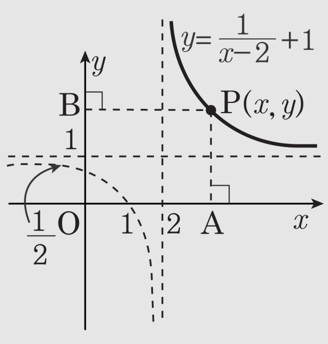


17. 분수함수 $y = \dfrac{1}{x-2} + 1(x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}} = y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ $\overline{\mathrm{PB}} = x(x > 2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} = x + \dfrac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

18. 함수 $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$에 대하여 대칭일 때, $a - b$의 값은? (단, $a < 0$)

① -4　　② -3　　③ -2　　④ -1　　⑤ 0

해설

$y = \dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+3}{x+1} = \dfrac{3}{x+1} + 2$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점$(-1,\ 2)$를 지나고

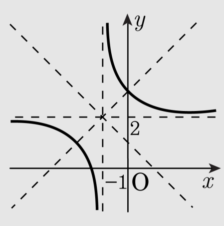
기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y - 2 = -(x+1)$

$\therefore\ y = -x + 1$

따라서 $a = -1,\ b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



19. $y = \sqrt{x+2}$ 와 $x = \sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 $\mathrm{P}\ (a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ $\frac{7}{5}$

해설

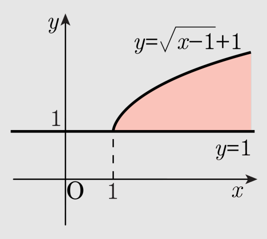
두 곡선은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+2}$ 와 $y = x$와의
교점이다.
$\sqrt{x+2} = x$ 에서 $x^2 = x+2$
$\therefore\ x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$에서
$x = -1$ 또는 $x = 2$
$\therefore \mathrm{P}(a,\ b) = \mathrm{P}(2,\ 2)$
($\because \mathrm{P}(a,\ b)$는 제 1 사분면에 존재한다.)

20. 실수 x, y 가 $1 \leq y \leq \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시킬 때, $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a-b$ 의 값을 구하면?

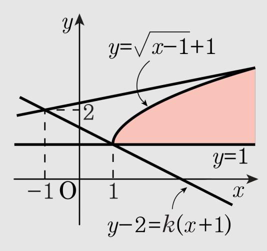
① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$1 \leq y \leq \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시키는 영역은
다음 그림의 색칠된 부분(경계선 포함)과 같다.



$\dfrac{y-2}{x+1} = k$(k 는 상수) 로 놓으면
$y-2 = k(x+1) \cdots$ ㉠이므로
㉠은 k 의 값에 관계없이 점$(-1,\ 2)$ 를 지난다.
(i) ㉠이 함수 $y = \sqrt{x-1}+1$ 의 그래프에 접할 때,
$kx+k+2 = \sqrt{x-1}+1$ 에서 $kx+k+1 = \sqrt{x-1}$



양변을 제곱하여 정리하면
$k^2x^2 + (2k^2+2k-1)x + k^2+2k+2 = 0$,
$D = 0$ 이므로 $8k^2+4k-1 = 0$
$\therefore k = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} (\because k > 0)$
(ii) ㉠이 점$(1,\ 1)$ 을 지날 때, $-1 = k \cdot 2$
$\therefore k = -\dfrac{1}{2}$
(i), (ii) 에서 $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$,
최솟값 $b = -\dfrac{1}{2}$ 이므로
$\therefore 2a-b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$