1. 함수 $y = \dfrac{2}{x+3} - 4$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$일 때, $a - b$의 값은?

① -7 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 7

해설

점근선이 $x = -3$, $y = -4$이므로 $a - b = 1$

2. 분수함수 $y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1,\ y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

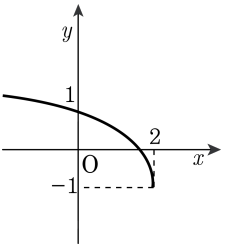
$y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1,\ y=6$ 이므로

$$y=\frac{6(x-1)+9}{x-1}=\frac{9}{x-1}+6$$

$\therefore\ a=-1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=5$

3. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?



① $y = \sqrt{-2x+4} - 1$

② $y = \sqrt{-x+1} - 1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4} + 1$

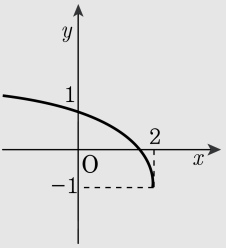
④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{2x-4} + 1$

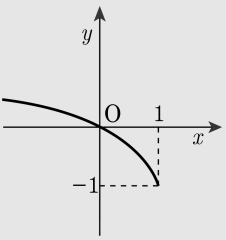
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

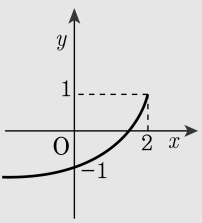
① $y = \sqrt{-2(x-2)} - 1$



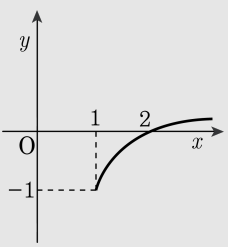
② $y = \sqrt{-(x-1)} - 1$



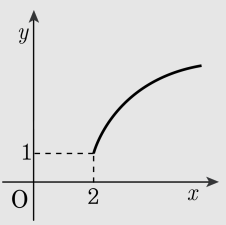
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$



④ $y = \sqrt{x-1} - 1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)} + 1$



4. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4) = k$ 로 놓으면

$f(k) = 4$

$\sqrt{k-1} + 2 = 4,\ \sqrt{k-1} = 2$

$k - 1 = 4$ 에서 $k = 5$

$\therefore\ f^{-1}(4) = 5$

5. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $y=\frac{2x-5}{x-2}$

Ⅱ. $y=\frac{2}{x-1}$

Ⅲ. $y=\frac{3x+4}{x+1}$

Ⅳ. $y=\frac{2x}{x-1}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅳ ③ Ⅱ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ

해설

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

이므로 $y=\frac{k}{x-p}+q$

꼴로 정리 했을 때, $k=2$ 이면

평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

Ⅰ. $y=\frac{2(x-2)-1}{x-2}=2-\frac{1}{x-2}$

$\therefore k=-1$

Ⅱ. $y=\frac{2}{x-1}$ $\therefore k=2$

Ⅲ. $y=\frac{3(x+1)+1}{x+1}=3+\frac{1}{x+1}$ $\therefore k=1$

Ⅳ. $y=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$ $\therefore k=2$

6. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y = \dfrac{1}{x}$ ② $y = \dfrac{2}{x}$ ③ $y = x + \dfrac{1}{x}$

④ $y = x + \dfrac{2}{x}$ ⑤ $y = 2x + \dfrac{2}{x}$

해설

$2x^2 = (x+1)(2x-2) + 2$ 이므로

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = (2x-2) + \frac{2}{x+1}$$

$$= 2(x+1) + \frac{2}{x+1} - 4$$

$$\therefore\ y + 4 = 2(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

이것은 $y = 2x + \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1, y축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

7. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$

$\Rightarrow -2 = 3a + b \cdots ①$

또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3, -2)$ 을 지나므로

$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$

$\Rightarrow 3 = \dfrac{-2a+b}{-4}$

$\Rightarrow -2a + b = -12 \cdots ②$

①, ② 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a + b = -6$

8. $y = \sqrt{4x-12}+5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a, y 축으로 b만큼 평행이동한 것이다.$a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축 방향으로 3만큼,
y 축 방향으로 5만큼 평행이동한
그래프의 함수이다.
즉, $a = 3,\ b = 5$
$\therefore\ a+b = 8$

9. $y = \sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3$, $\beta = 5$
$\therefore\ \alpha+\beta = 8$

10. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

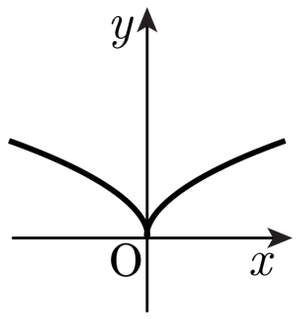
해설

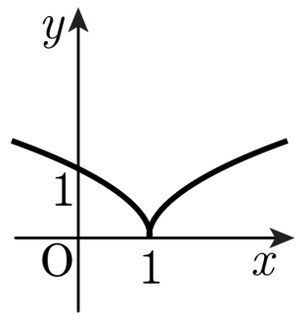
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

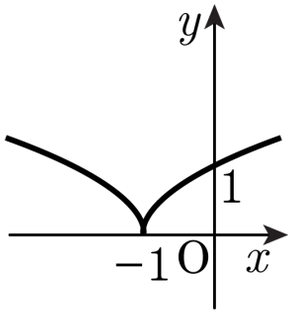
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

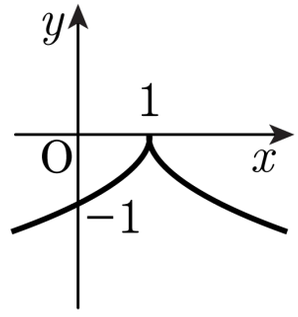
$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

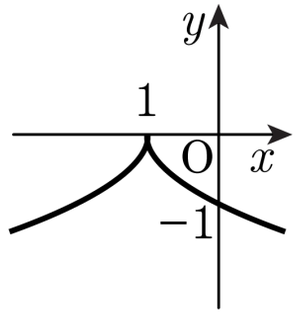
11. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$x \geq -1$이면 $y = \sqrt{x+1}$
$x < -1$이면 $y = \sqrt{-x-1}$이므로
3번이 정답임.

12. 점 $(0,1)$을 지나고 점근선이 $x=-2,\ y=2$인 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 다음 중 어느 것을 평행이동한 것인가?

① $y=-\dfrac{1}{x}$ ② $y=-\dfrac{2}{x}$ ③ $y=-\dfrac{3}{x}$

④ $y=\dfrac{1}{x}$ ⑤ $y=\dfrac{2}{x}$

해설

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 점근선이 $x=-2,\ y=2$이므로

$y=\dfrac{k}{(x+2)}+2$로 놓을 수 있고

이것이 점$(0,1)$를 지나므로

$1=\dfrac{k}{2}+2$

$\therefore\ k=-2$

따라서 $y=\dfrac{-2}{x+2}+2$이므로

이 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로

-2만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

그래프이다.

13. 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g\cdot f)(x)=x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(g\circ f)(x)=x$

$\Rightarrow \quad g(f(x))=x$

$\Rightarrow \quad g\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)=x$

$\therefore \quad g(1)$ 을 구하려면, $\dfrac{x+2}{2x-1}=1$ 이 되어야 한다.

$\Rightarrow \quad x=3 \quad \therefore \quad g(1)=3$

14. 두 집합 $A = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; y = \dfrac{2x+4}{x+1},\ 0 \le x \le 1\right\}$, $B = \{(x,\ y) \mid y = m(x+2)\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$ 이 성립하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $-1 \le m < 2$ ② $m \le 0, m \ge 2$ ③ $1 \le m \le 2$

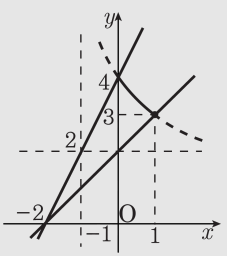
④ $-1 \le m \le 1$ ⑤ $m < 1, m \ge 3$

해설

$$y = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2(x+1)+2}{x+1}$$

$$= \frac{2}{x+1} + 2 \text{ 이므로}$$

집합 A 가 나타내는 영역은 그림과 같다.



$y = m(x+2)$ 에서 집합 B 는
점 $(-2,\ 0)$ 을 지나는 직선들의 모임이다.
이때, $A \cap B \neq \varnothing$ 이려면
두 집합이 나타내는 그래프가 만나야 하므로
직선 $y = m(x+2)$ 가 점 $(1,\ 3)$ 을 지날 때와
점 $(0,\ 4)$ 를 지날 때 사이에 존재해야 한다.
따라서, 구하는 m 의 범위는

$$\frac{3-0}{1-(-2)} \le m \le \frac{4-0}{0-(-2)}$$

$\therefore\ 1 \le m \le 2$

15. $1 \le x \le a$ 일 때, $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. $a + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

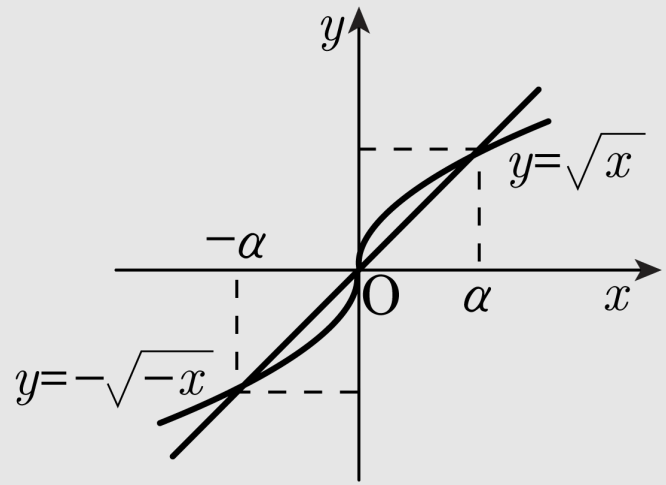
$1 \le x \le a$ 에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1} + 3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$ 일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1} + 3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a + m = 9$

16. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0 이다.

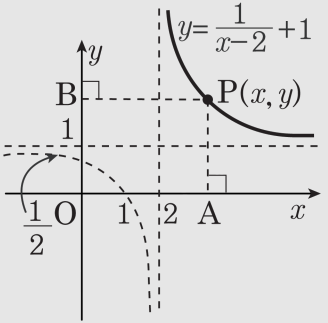


17. 분수함수 $y = \dfrac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x (x > 2)$

$\therefore\ \overline{PA} + \overline{PB} = x + \dfrac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \dfrac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

18. 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, $a-b$ 의 값은? (단, $a<0$)

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y=\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}+2$$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나고

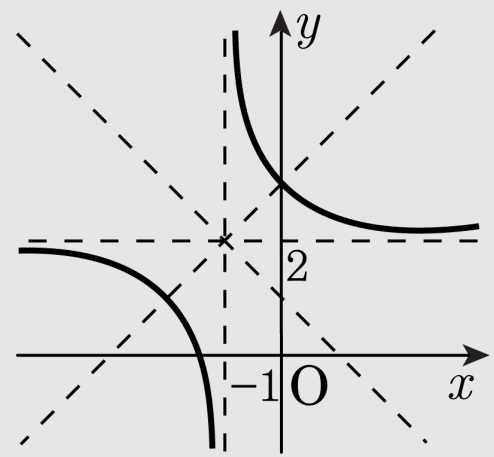
기울기가 ±1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y-2=-(x+1)$

$\therefore\ y=-x+1$

따라서 $a=-1,\ b=1$ 이므로 $a-b=-2$



19. $y=\sqrt{x+2}$ 와 $x=\sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ $\frac{7}{5}$

해설

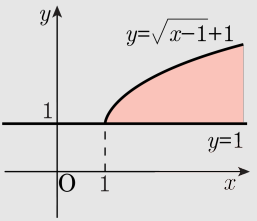
두 곡선은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y=\sqrt{x+2}$ 와 $y=x$ 와의
교점이다.
$\sqrt{x+2}=x$ 에서 $x^2=x+2$
$\therefore\ x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$ 에서
$x=-1$ 또는 $x=2$
$\therefore \mathrm{P}(a,\ b)=\mathrm{P}(2,\ 2)$
($\because \mathrm{P}(a,\ b)$ 는 제 1 사분면에 존재한다.)

20. 실수 x, y 가 $1 \le y \le \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시킬 때, $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a-b$ 의 값을 구하면?

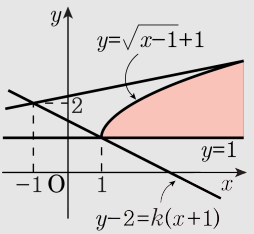
① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$1 \le y \le \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시키는 영역은
다음 그림의 색칠된 부분(경계선 포함)과 같다.



$\dfrac{y-2}{x+1} = k$(k 는 상수) 로 놓으면
$y-2 = k(x+1) \cdots$ ㉠이므로
㉠은 k 의 값에 관계없이 점$(-1,\ 2)$ 를 지난다.
(i) ㉠이 함수 $y = \sqrt{x-1}+1$ 의 그래프에 접할 때,
$kx+k+2 = \sqrt{x-1}+1$ 에서 $kx+k+1 = \sqrt{x-1}$



양변을 제곱하여 정리하면
$k^2x^2 + (2k^2+2k-1)x + k^2 + 2k + 2 = 0$,
$D = 0$ 이므로 $8k^2 + 4k - 1 = 0$

$\therefore k = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} (\because k > 0)$

(ii) ㉠이 점$(1,\ 1)$ 을 지날 때, $-1 = k \cdot 2$

$\therefore k = -\dfrac{1}{2}$

(i), (ii) 에서 $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$,

최솟값 $b = -\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\therefore 2a - b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$