1. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ 이다. 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16\ (a < 0)$
$\therefore b = -2a,\ c = a + 16 (a < 0) \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = |\beta - \alpha| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$
$\therefore \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면
$-64a = 64a^2,\ \ a^2 = -a,\ a(a+1) = 0$
그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$
$\therefore b = -2a = 2,\ c = a + 16 = 15$
$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$

2. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x)-f(-x)=x^2-3x+8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$2(ax^2+bx+c)-(ax^2-bx+c)=x^2-3x+8$

$\Rightarrow b=-1, c=8, a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+8=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

3. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

4. $f(x)=|2x-3|-2,\ g(x)=x^2-3$ 일 때, $0 \le x \le 2$ 에서 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=t$ 로 놓으면,

$-2 \le t \le 1$

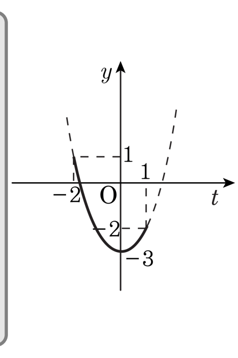
$(g \circ f)(x)=g(t)=t^2-3$

따라서 최댓값은 1 ,

최솟값은 -3

$\therefore\ M=1, m=-3$

$\therefore\ M+m=-2$



5. 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2 + y^2 = 4x$ 를 만족할 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면, $M - m$ 의 값은 얼마인가?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2 = -2x^2 + 4x$ 를 $x^2 + y^2$ 에 대입하면
$-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \cdots$ ①
$x,\ y$ 가 실수이므로
$-2x^2 + 4x \geq 0 \ \rightarrow \ x(x-2) \leq 0$
$\therefore\ 0 \leq x \leq 2 \cdots$ ②
② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는
$x = 0$ 일 때 최솟값 0, $x = 2$ 일 때 최댓값 4 이다.
$\therefore\ M - m = 4$

6. $x,\ y$ 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\ &= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\ &= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3,\ y = -2$ 일 때, 최솟값 -5

7. x 가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}=k$ 라 하면

$x^2-x+3=k\left(x^2+x+1\right)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-3=0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D\geq 0$ 이다.

$D=(k+1)^2-4(k-1)(k-3)\geq 0$

$3k^2-18k+11\leq 0$

$\therefore \dfrac{9-4\sqrt{3}}{3}\leq k\leq \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3}$

$0.\times\times\times \leq k \leq 5.\times\times\times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이다.

(i), (ii) 에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.

8. 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$　　② $2+\sqrt{3}$　　③ $3\sqrt{3}$

④ 6　　⑤ $6+\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{y}{x}=t$ 라고 놓으면 $y=tx$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 에 대입하여 정리하면

$(t^2+1)x^2-6(t+1)x+12=0$

$\dfrac{D}{4}\geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2-12(t^2+1)\geq 0$

$t^2-6t+1\leq 0$

$\therefore\ 3-2\sqrt{2}\leq t\leq 3+2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.