

1. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다.
 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{AB} = 8$ 이다.
 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때

최대이고 최댓값은 16 이므로

$$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16 \quad (a < 0)$$

$$\therefore b = -2a, \quad c = a + 16 \quad (a < 0) \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\overline{AB} = |\beta - \alpha| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{을 } \textcircled{8} \text{에 대입하면 } \frac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$$

$$\therefore \sqrt{-64a} = -8a \text{ 양변을 제곱하면}$$

$$-64a = 64a^2, \quad a^2 = -a, \quad a(a+1) = 0$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$

$$\therefore b = -2a = 2, \quad c = a + 16 = 15$$

$$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$$

2. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

① $\frac{27}{4}$

② $\frac{29}{4}$

③ $\frac{31}{4}$

④ $\frac{33}{4}$

⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$$

$$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$

$$\Rightarrow \text{최솟값} : \frac{31}{4}$$

3. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{3}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{7}{4}$

⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$

$\therefore a = 5$

(ii) $-1 \leq -a < 2$, 즉 $-2 < a \leq 1$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8$, $a^2 = 9$

$\therefore a = \pm 3$

$-2 < a \leq 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \geq 2$, 즉 $a \leq -2$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$

$\therefore a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

4. $f(x) = |2x - 3| - 2$, $g(x) = x^2 - 3$ 일 때, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = t$ 로 놓으면,

$$-2 \leq t \leq 1$$

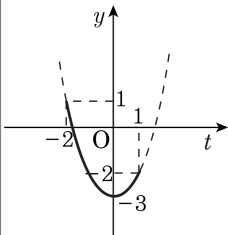
$$(g \circ f)(x) = g(t) = t^2 - 3$$

따라서 최댓값은 1,

최솟값은 -3

$$\therefore M = 1, m = -3$$

$$\therefore M + m = -2$$



5. 실수 x, y 가 $2x^2 + y^2 = 4x$ 를 만족할 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면, $M - m$ 의 값은 얼마인가?

① 3

② $\frac{7}{2}$

③ 4

④ $\frac{9}{2}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2 = -2x^2 + 4x$ 를 $x^2 + y^2$ 에 대입하면

$$-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \cdots \textcircled{1}$$

x, y 가 실수이므로

$$-2x^2 + 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2 \cdots \textcircled{2}$$

② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는

$x = 0$ 일 때 최솟값 0, $x = 2$ 일 때 최댓값 4 이다.

$$\therefore M - m = 4$$

6. x, y 가 실수일 때, $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\ &= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\ &= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3, y = -2$ 일 때, 최솟값 -5

7. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 6개

해설

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} = k \text{ 라 하면}$$

$$x^2 - x + 3 = k(x^2 + x + 1)$$

$(k-1)x^2 + (k+1)x + k-3 = 0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D \geq 0$ 이다.

$$D = (k+1)^2 - 4(k-1)(k-3) \geq 0$$

$$3k^2 - 18k + 11 \leq 0$$

$$\therefore \frac{9-4\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{9+4\sqrt{3}}{3}$$

$0. \times \times \times \leq k \leq 5. \times \times \times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.

8. 원 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3 + 2\sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $3\sqrt{3}$

④ 6

⑤ $6 + \sqrt{2}$

해설

$\frac{y}{x} = t$ 라고 놓으면 $y = tx \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 을 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 에 대입하여 정리하면
 $(t^2 + 1)x^2 - 6(t+1)x + 12 = 0$

$\frac{D}{4} \geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2 - 12(t^2 + 1) \geq 0$

$t^2 - 6t + 1 \leq 0$

$\therefore 3 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 3 + 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3 + 2\sqrt{2}$ 이다.