

1. 다음 두 수의 대소 관계가 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $\sqrt{0.1} < \sqrt{0.5}$

② $-\sqrt{5} > -\sqrt{3}$

③ $\sqrt{0.1} < 0.1$

④ $\sqrt{27} > 5$

⑤ $7 < \sqrt{51}$

해설

② $-\sqrt{5} < -\sqrt{3}$

③ $\sqrt{0.1} > \sqrt{0.01}$

2. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

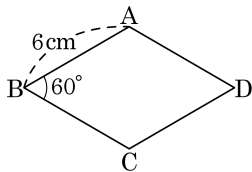
▷ 정답 : 1

해설

$$y = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 1$$

따라서 $x = -4$ 일 때, 최댓값은 1 이다.

3. 다음 그림과 같이 $\angle B = 60^\circ$ 이고, 한 변의 길이가 6 cm 인 마름모 ABCD 의 넓이는?



- ① $9\sqrt{3}\text{ cm}^2$ ② $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$
 ③ $27\sqrt{3}\text{ cm}^2$ ④ $30\sqrt{3}\text{ cm}^2$
 ⑤ $40\sqrt{3}\text{ cm}^2$

해설

$\triangle ABC$ 는 정삼각형이므로

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

마름모 ABCD 의 넓이는 $9\sqrt{3} \times 2 = 18\sqrt{3} (\text{cm}^2)$

4. 다음의 식의 값을 구하면?

$$2 - 3 \sin 30^\circ \times \tan 45^\circ + 2 \sin 60^\circ \times \cos 60^\circ$$

① $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

② $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2 - 3 \times \frac{1}{2} \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \\&= 2 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\&= \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

5. 세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 1y - 10 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 8 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 6x - 5y - 20 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

으로 놓으면 이 원이

세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을

지나므로 차례로 대입하면

$$1 + 16 - A + 4B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$9 + 36 + 3A + 6B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$9 - 3B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$A = -6, B = -2, C = -15$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

6. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$

② $\frac{90}{13}$

③ $\frac{120}{13}$

④ $\frac{150}{13}$

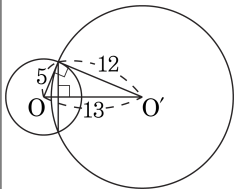
⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면
 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



7. 다음 빈칸에 들어갈 수를 모두 더하여라.

$$3x^2 + \square x - 96 = 3(x + 4)(x + \square)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$$3x^2 + Ax - 96 = 3(x + 4)(x + B) \text{ 라 하면}$$

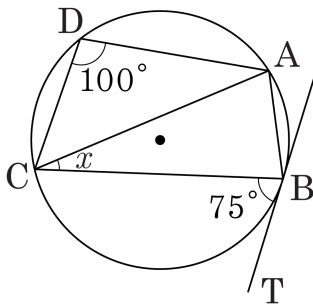
$$\begin{aligned} 3(x + 4)(x + B) &= 3x^2 + 3(4 + B)x + 12B \\ &= 3x^2 + Ax - 96 \end{aligned}$$

$$12B = -96 \text{에서 } B = -8$$

$$A = 3(4 + B) = -12$$

$$\therefore A + B = -20$$

8. 다음과 같이 $\square ABCD$ 는 원 O 에 내접하고 $\overline{BT}$ 는 원 O 의 접선일 때, $\angle x$ 의 크기는 ?



① 25°

② 24°

③ 23°

④ 22°

⑤ 21°

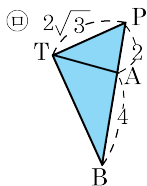
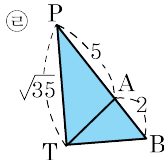
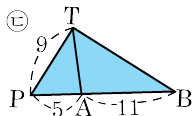
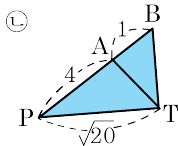
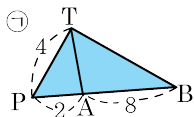
해설

$$\angle ABC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle x = 180^\circ - 80^\circ - 75^\circ = 25^\circ$$

9. 다음 보기에서 $\overline{PT}$ 가 $\triangle ABT$ 의 외접원의 접선이 될 수 없는 것을 모두 고르면?

보기



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉢

해설

㉠ $(4)^2 \neq 2 \times 10$ 이므로 $\overline{PT}^2 \neq \overline{PA} \times \overline{PB}$

㉢ $(9)^2 \neq 5 \times 16 = 80$ 이므로 $\overline{PT}^2 \neq \overline{PA} \times \overline{PB}$

10. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$$

$$= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$a = k - 2, \quad b = 3 - 2k, \quad 3 = k + 1$$

$$k = 2 \text{ 이므로 } a = 0, \quad b = -1$$

$$\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$$

11. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
 ㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.
 ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
 ㉤ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉤ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai (a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

12. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0, D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2, a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

13. 이차방정식 $3x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha - \beta|$ 의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

해설

$3x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

$$\text{한편, } |\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 \\ = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$|\alpha - \beta|^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{40}{9}$$

$$\text{따라서, } |\alpha - \beta| = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

14. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - a + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원을 각각 표준형으로 고치면

$(x - 1)^2 + y^2 = a - 2$, $x^2 + y^2 = 1$ 이므로

두 원의 중심 사이의 거리 d 는 $d = 1$ 이다.

두 원이 외접할 조건은 $r + r' = d$ 이므로

$$\sqrt{a - 2} + 1 = 1$$

$$\therefore a = 2$$

15. $f(x, y) = 4x + 3y + 4$ 일 때, 다음 <보기> 중에서 $f(x, y) < 0$ 의 영역에 속하는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ (1, 1)

㉡ (-1, 0)

㉢ (-3, -8)

㉣ (0, 0)

㉤ (4, -8)

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

직선 $4x + 3y + 4 = 0$ 보다 아래쪽에 있는 점은 ㉢, ㉤ 2개이다.

16. $x \geq 0, y \geq 1, y \leq -2x + 3$ 일 때, $\frac{y-1}{x+2}$ 의 최댓값과 최솟값을 M, m 이라 하면, $M - m$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x \geq 0, y \geq 1, y \leq -2x + 3$ 의 영역에서

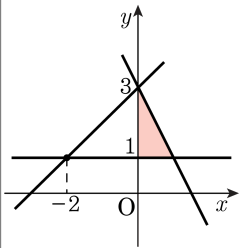
$$\frac{y-1}{x+2} = k \text{ 라 하면 } y-1 = k(x+2)$$

이것은 항상 점 $(-2, 1)$ 을 지나는 직선
이므로

점 $(0, 3)$ 을 지날 때 k 가 최대이고,

$$\text{최댓값 } M = \frac{3-1}{0+2} = 1, \text{ 최솟값은 } m = 0$$

$$\therefore M - m = 1$$



17. 실수 a, b 에 대하여 $a < 0, 0 < b < 1$ 이다. $\sqrt{(-2a)^2} - \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(1-b)^2}$ 을 간단히 하였을 때 a, b 의 계수와 상수항의 합은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$a < 0, 0 < b < 1$ 이므로

$a - b < 0, 1 - b > 0$

$$\therefore \sqrt{(-2a)^2} - \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(1-b)^2}$$

$$= |-2a| - |a-b| + |1-b|$$

$$= -2a + a - b + 1 - b$$

$$= -a - 2b + 1$$

따라서 구하는 값은 $-1 - 2 + 1 = -2$ 이다.

18. 1에서 n 까지의 자연수의 합은 $\frac{n(n+1)}{2}$ 이다. 합이 78이 되려면 1에서 얼마까지 더하면 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\frac{n(n+1)}{2} = 78, n(n+1) = 156,$$

$$n^2 + n - 156 = 0,$$

$$(n+13)(n-12) = 0,$$

$$n = -13 \text{ 또는 } n = 12,$$

따라서 n 은 자연수이므로 $n = 12$ 이다.

19. $x = -3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

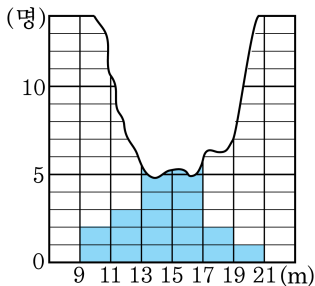
$$\begin{aligned}y &= a(x+3)^2 + 4 \\&= a(x^2 + 6x + 9) + 4 \\&= ax^2 + 6ax + 9a + 4\end{aligned}$$

$$9a + 4 = 2, \quad 9a = -2 \text{ 이므로 } a = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$$

$$\therefore abc = \left(-\frac{2}{9}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times 2 = \frac{16}{27}$$

20. 다음 히스토그램은 어느 학급 학생 20 명의 던지기 기록을 조사하여 만든 것인데 일부가 찢어졌다. 던지기 기록이 13m 이상 15m 미만인 학생이 전체의 25% 일 때, 전체 학생의 평균을 구하여라.



▶ 답: m

▷ 정답: 14.7 m

해설

$$13 \text{ 이상 } 15 \text{ 미만: } 20 \times \frac{25}{100} = 5(\text{명})$$

$$15 \text{ 이상 } 17 \text{ 미만의 도수: } 7(\text{명})$$

$$\frac{10 \times 2 + 12 \times 3 + 14 \times 5}{20} + \frac{16 \times 7 + 18 \times 2 + 20 \times 1}{20} =$$

$$14.7(\text{m})$$

21. 다음 그림에서 두 대각선이 서로 직교할 때,
 $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면?

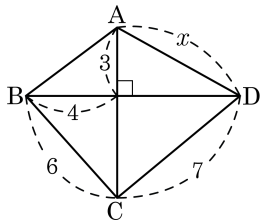
① $\sqrt{23}$

② $3\sqrt{3}$

③ $\sqrt{31}$

④ $\sqrt{38}$

⑤ $3\sqrt{5}$



해설

피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AB} = 5$$

$$5^2 + 7^2 = x^2 + 6^2$$

$$25 + 49 = x^2 + 36$$

$$\therefore x = \sqrt{38}$$

22. $\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$ 라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1} &= \frac{x^8 - x^7 - x + 1}{x^7 - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1} \\ &= x-1 = 2^5 - 1 = 31\end{aligned}$$

23. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 일 때, xy 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0 \text{ 을}$$

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, x 는 실수이므로 $\textcircled{1}$ 은 실근을 가져야 한다.

$$D = (y+1)^2 - 2(y^2 - 2y + 5) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad (y-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore y = 3$$

$y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \quad \therefore xy = (-2) \cdot 3 = -6$$

24. 다음 식이 나타내는 영역의 넓이 중 두 번째로 큰 것은 어느 것인지 구하면?

$$A : |x| \leq 1, |y| \leq 1,$$

$$B : x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$C : |y| \leq 1 - x^2,$$

$$D : |x| + |y| \leq 1$$

① A

② B

③ C

④ D

⑤ 구할 수 없다.

해설

A 는 $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부

B 는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원의 내부

C 는 포물선 $y = -x^2 + 1$ 의 아랫부분

D 는 $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 마름모의 내부

따라서 두 번째로 큰 것은 B

25. 이차방정식 $ax^2 + bx + ca = -b$ 가 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 1$ 을 근으로 가질 때, bc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x = 1$ 을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$a + b + ca = -b$$

a 에 대하여 정리하면

$$(1 + c)a + 2b = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$1 + c = 0, 2b = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore b = 0, c = -1$$

$$\therefore bc = 0$$

26. $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5 + y^5 = -1$

㉡ $x^9 + y^9 = -1$

㉢ $x^{11} + y^{11} = -1$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$$

$$x^2 = -x - 1 \dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 x 를 곱하면

$$x^3 = -x^2 - x = -(x^2 + x) = 1 \quad (\because x^2 + x = -1)$$

$$x^3 = 1, y \text{에 대해서도 마찬가지로 하면 } y^3 = 1$$

$$\text{또한 } x + y = -1, xy = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} x^5 + y^5 &= x^3 \cdot x^2 + y^3 \cdot y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} x^9 + y^9 &= (x^3)^3 + (y^3)^3 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} x^{11} + y^{11} &= (x^3)^3 \times x^2 + (y^3)^3 \times y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

*다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0 \text{ 에서}$$

각각 양변에 $x - 1, y - 1$ 을 곱하면

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0, (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = y^3 = 1$$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x + y = -1, xy = 1$ 이므로

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \therefore x^3 = 1, y^3 = 1$$

27. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$

의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \right\} - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ 로 놓으면

$$z^2 + 2z - 3 = (z + 3)(z - 1) = 0$$

$$\therefore z = -3 \text{ 또는 } z = 1$$

(i) $z = -3$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -3 \text{에서 } x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} : \text{실근}$$

(ii) $z = 1$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{에서}$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 해는 허수이므로

w 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해이다.

$$\therefore w^2 - w + 1 = 0, w^3 = -1$$

$$\therefore w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$$

$$= w^2 \cdot w^{2004} + \frac{1}{w^2 \cdot w^{2004}}$$

$$= w^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 = w^2 - w = -1$$

28. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + (a + 5)x - a = 0$ 의 세 근 중 두 근은 서로 다르고 역수 관계가 성립한다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + (a + 5)x - a$ 라면

$f(1) = 2 - 7 + a + 5 - a = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어진다.

$$\therefore (x - 1)(2x^2 - 5x + a) = 0$$

따라서, $2x^2 - 5x + a = 0$ 에서 두 근을 α, β 라 하면,

α, β 는 서로 다르고 서로 역수의 관계에 있으므로 $\alpha\beta = 1$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{a}{2} = 1 \text{에서 } a = 2$$

29. 세 점 A(1, 1), B(3, 3), C(4, 0) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내부에 점 $(a, 2)$ 가 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < \frac{4}{3}$

② $\frac{2}{3} < a < 3$

③ $\frac{1}{3} < a < 2$

④ $2 < a < \frac{10}{3}$

⑤ $\frac{4}{3} < a < 4$

해설

삼각형 ABC 에서 직선 AB 의 방정식은 $y = x$

직선 BC 의 방정식은 $y = -3x + 12$

직선 CA 의 방정식은 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 이므로

삼각형 ABC 의 내부는 세 부등식

$y < x$, $y < -3x + 12$, $y > -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 를 동시에 만족시키는

영역이다.

점 $(a, 2)$ 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하므로

$2 < a \cdots \textcircled{㉠}$,

$2 < -3a + 12 \therefore a < \frac{10}{3} \cdots \textcircled{㉡}$,

$2 > -\frac{1}{3}a + \frac{4}{3} \therefore a > -2 \cdots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 a 의 값의 범위는 $2 < a < \frac{10}{3}$

30. 좌표 평면 위의 점 $P(x, y)$ 가 두 부등식 $|x+y-3| \leq 1$, $|2x-y-1| \leq 3$ 을 동시에 만족시킬 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{40}{3}$

② $\frac{42}{3}$

③ $\frac{121}{9}$

④ $\frac{122}{9}$

⑤ $\frac{123}{10}$

해설

$$|x+y-3| \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq x+y-3 \leq 1$$

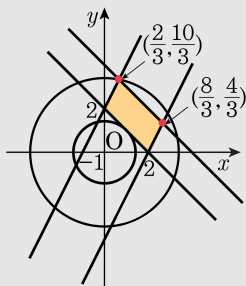
$$\therefore -x+2 \leq y \leq -x+4$$

$$|2x-y-1| \leq 3$$

$$\therefore -3 \leq 2x-y-1 \leq 3$$

$$\therefore 2x-4 \leq y \leq 2x+2$$

따라서 점 P 가 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분이다.



한편 $x^2 + y^2 = r^2$ 이라 하면 이것은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 원이므로 r 의 값이 최소가 되는 때는

이 원이 직선 $y = -x + 2$ 에 접할 때이고,

r 의 값이 최대가 되는 때는 이 원이 점 $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 을 지날 때이다.

$$\therefore r^2 \text{의 최솟값} \left(\frac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2 = 2$$

$$r^2 \text{의 최댓값} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{104}{9}$$

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은

$$2 + \frac{104}{9} = \frac{122}{9}$$