1. 다음 중에서 집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① 키가 작은 학생들의 모임

② 10 에 가까운 수의 모임

③ 우리 반에서 배우는 교과목의 모임

④ 영어를 잘하는 학생들의 모임

⑤ 1 보다 작은 자연수의 모임

해설

③, ⑤는 기준이 명확하므로 집합이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4,\ n$은 자연수$\}$에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$ ② $4 \in A$ ③ $7 \notin A$
④ $10 \notin A$ ⑤ $17 \in A$

해설
$A = \{3,\ 10,\ 17,\ \cdots\}$
① $3 \in A$
② $4 \notin A$
④ $10 \in A$

3. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{4, 8\}$
④ $\{2, 8\}$ ⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

4. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$
④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

5. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

6. 집합 $A = \{\varnothing, 1, 2, \{1, 2\}\}$일 때, 다음 보기 중에서 옳은 것은 <u>모두</u> 몇 개인가?

㉠ $\varnothing \in A$	㉡ $\{\varnothing\} \subset A$	㉢ $\{1, 2\} \subset A$
㉣ $\{1, 2\} \in A$	㉤ $\{\{1, 2\}\} \subset A$	

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ : $\varnothing$은 집합 A의 원소이다.
㉡ : $\varnothing$이 원소이므로 $\{\phi\} \subset A$
㉢ : $\{1, 2\}$는 집합 A의 부분집합이다.
㉣ : $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이다.
㉤ : $\{\{1, 2\}\}$는 집합 A의 부분집합이다.

7. 두 집합 $A = \{2,\ 5,\ a+3\}$, $B = \{b-3,\ 5,\ 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
$A = B$ 이므로 $a + 3 = 9$, $b - 3 = 2$
따라서 $a = 6$, $b = 5$
$\therefore\ a + b = 11$

8. 집합 $X = \{x|x$는 8의 약수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A = \{x|x$는 4의 약수$\}$일 때, $A \cup B = X$가 되는 집합 B의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8개

해설

$X = \{1, 2, 4, 8\}$, $A = \{1, 2, 4\}$이고
$A \cup B = X$가 되어야 하므로 집합 B는 원소 8을 반드시 포함해야 한다.
따라서, 집합 B는
$\{8\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 8\}$,
$\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$
이므로 8 개이다.

9. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, 주어진 식을 간단히 하면?

$$(A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24})$$

① A_{36} ② A_{24} ③ A_{18} ④ A_{12} ⑤ A_6

해설

$(A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24})$
$= (A_{36} \cup A_{18}) \cap (A_{36} \cup A_{24})$
$= A_{36} \cup (A_{18} \cap A_{24})$
$= A_{36} \cup A_{72}$ ($\because$ 18과 24의 최소공배수는 72)
$= A_{36}$

10. $p(x)$: $x > 0$, $q(x)$: $x < 1$ 일 때, '$p(x)$ 이고 $q(x)$' 의 진리집합을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid x > 0\}$

② $\{x \mid 0 < x < 1\}$

③ $\{x \mid x > 1\}$

④ $\{x \mid x < 0$ 또는 $x > 1\}$

⑤ $\{x \mid x < 1\}$

해설

$p(x)$: $x > 0$, $q(x)$: $x < 1$ 이므로 $p(x)$ 이고 $q(x)$ 이면 $x > 0$ 이고 $x < 1$ 이다.

즉, $\{x \mid 0 < x < 1\}$

11. 자연수 n에 대하여 n^2 이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

> 주어진 명제의 (가) 을(를) 구하여 보면
> (가) : 'n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
> 이 때, n 이 홀수이므로
> $n =$ (나)(k는 0 또는 자연수)
> 이 때, $n^2 =$ (나)$^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
> 여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다) 이므로 n^2 은 홀수이다.
> $\therefore$ (가) 가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다' 라는 성질을 이용한 것이므로
$\therefore$ (가) : 대우
n 이 홀수이므로 $\therefore$ (나) : $2k+1$
$2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수) 의 형태이므로
$\therefore$ (다) : 0 또는 짝수

12. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건이 아닌 것은? (단 a, b, c 는 실수)

① $p : a = b,\ q : ac = bc$

② $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = 0$또는$b = 0$

③ $p : \triangle\mathrm{ABC}$ 는 이등변삼각형, $q : \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$

④ $p : a = 1,\ q : a^2 - 3a + 2 = 0$

⑤ $p : 0 < a < b,\ q : a^2 < b^2$

해설

① $q\ :\ ac = bc\ \rightarrow\ a = b$ 또는 $c = 0$ (참)
② $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$(참)
③ $\angle\mathrm{B} \neq \angle\mathrm{C} \rightarrow \triangle\mathrm{ABC}$는 이등변 삼각형이 아니다. (거짓)
반례 : $\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{A}$ 인 이등변 삼각형
④ $q\ :\ a = 1,\ 2$ (참)
⑤ $(0 < a < b) \subset (a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < a < b$ 또는 $b < a < 0)$

13. $a,\ b,\ c$ 가 실수일 때, p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = b = 0$

② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b,\ q : ac = bc$

④ $p : a - b = 0,\ q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0,\ q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

① 명제 자체도 성립하고 역도 성립하므로 필요충분조건이다.
② (반례) $a = 1,\ b = 1$ 인 경우
③ (반례) 역일 때, $c = 0$ 인 경우
④ (반례) 명제와 역 모두 성립하지 않는다.
⑤ (반례) 역일 때 $a = 0,\ b = 0$ 인 경우 $ab = 0$ 이므로 성립하지 않는다.

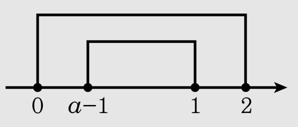
14. $0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이고, 필요조건이 $b+3 \le x \le 3$ 이다. a 의 최솟값을 m, b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m+M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

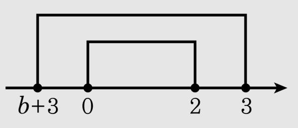
▷ 정답 : $m+M=-2$

해설

$0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이므로
$\{x \mid a-1 \le x \le 1\} \subset \{x \mid 0 \le x \le 2\}$



위의 그림에서 $0 \le a-1 \le 1$
$\therefore\ 1 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
또, $0 \le x \le 2$ 이기 위한 필요조건이
$b+3 \le x \le 3$ 이므로
$\{x \mid 0 \le x \le 2\} \subset \{x \mid b+3 \le x \le 3\}$



위의 그림에서 $b+3 \le 0$
$\therefore\ b \le -3 \cdots$ ㉡
㉠에서 a 의 최솟값 $m=1$,
㉡에서 b 의 최댓값 $M=-3$
$\therefore\ m+M=1+(-3)=-2$

15. 두 집합 $A=\{x \mid x\text{는}8\text{ 의 배수}\}$,$B=\{x \mid x\text{는 }\boxed{}\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\boxed{}$안에 알맞은 자연수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A \subset B$ 이면 $\boxed{}$는 8 의 약수이어야 한다. 따라서 $\boxed{}$는 1, 2, 4, 8 의 4 개이다.

16. 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } n\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 54\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 이기 위한 자연수 n 의 값은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

n 은 54 를 뺀 54 의 약수이므로 $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27$ 이다. 따라서 7 개이다.

17. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$, $B = \{a_k + b | a_k \in A\}$가 있다. $A \cap B = \{4,\ 7,\ 9\}$이고, 집합 A의 원소의 합이 32, $A \cup B$의 원소의 합이 62일 때, 집합 B의 원소 중 가장 큰 수와 작은 수의 차를 구하여라.

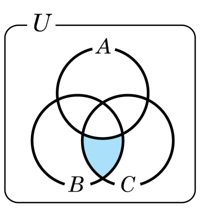
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \cap B$의 원소의 합에서 집합 A의 원소의 합을 빼고,
$A \cup B$의 원소의 합을 더해 주면
집합 B의 원소의 합이 되므로, 집합 B의 원소의 합은 50이다.
집합 A의 원소의 합이
$a_1 +\ a_2 +\ a_3 +\ a_4 +\ a_5 +\ a_6 = 32$이고,
$B = \{a_1 + b,\ a_2 + b,\ a_3 + b,\ a_4 + b,\ a_5 + b,\ a_6 + b\}$이므로
집합 B의 원소의 합은
$a_1 + b + a_2 + b + a_3 + b + a_4 + b + a_5 + b + a_6 + b = 32 + 6b$
$32 + 6b = 50$ 이므로 $b = 3$이 된다.
교집합의 원소인 $4, 7, 9$는 집합 A와 B의 원소이므로 각각 3을 더한 7, 10, 12도 집합 B의 원소가 된다.
또 집합 B의 원소의 합이 50이므로 4, 7, 9, 10, 12와 8이 된다.
$\therefore B = \{4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

18. 전체집합 U 에 대하여 세 부분집합 A, B, C 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 색칠된 부분을 나타내는 집합을 모두 고르면?



① $A^c \cap B \cap C$

② $A \cap B \cap C$

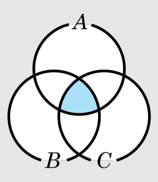
③ $(B \cup C) - A$

④ $(B \cap C) - A$

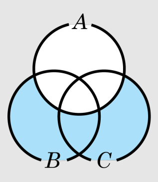
⑤ $(B - A) \cup (C - A)$

해설

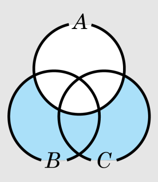
②



③



⑤



19. 두 조건 p_n, $q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n = \{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n = \{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P_1 \cap P_2 = P_2$　　② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$　　④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1,\ P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

20. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

① $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$

② $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le |a|+|b|+|c|$

③ $\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

④ $a^2+b^2+c^2 \le (a+b+c)^2$

⑤ $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

해설

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$ 이므로

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

③의 경우 양변을 제곱하여 빼면

$3(a^2+b^2+c^2)-|a+b+c|^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0$

$\therefore \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

21. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 32\}$의 부분집합 S가 다음 조건을 만족할 때 $n(S)$의 최댓값은?

$a \in S,\ b \in S\ (a \neq b)$ 이면 $a+b \neq 5k$
(k는 자연수)

① 6 ② 7 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

1 에서 32까지의 자연수를 5로 나누었을 때, 나머지에 따라 5개의 집합으로 분류하면
$A_0=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$
$A_1=\{1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31\}$
$A_2=\{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32\}$
$A_3=\{3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28\}$
$A_4=\{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29\}$
구하는 집합 S의 원소는 A_0의 원소 중 1 개, A_1과 A_4의 원소 중 한 쪽 것만 택해야 하므로 큰 쪽인 A_1의 7 개, A_2와 A_3중 A_2의 7 개를 택하면 $n(S)$의 최댓값은 15 (개)이다.

22. 두 집합 P, Q 에 대하여 $(P-Q)\cup(Q-P)$ 의 가장 작은 원소가 P 의 원소이면 $P < Q$, Q 의 원소이면 $P > Q$ 라고 정의한다. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,3,4,5\}$, $C = \{2,4,6,8\}$ 에 대하여 $A < B$, $B < C$ 를 만족하기 위한 자연수 a 를 모두 구하여라. (단, $n(B) = 4$ 이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

1) $a = 1$일 때
$(A-B)\cup(B-A) = \{2,5\}$이므로 $A < B$,
$(B-C)\cup(C-B) = \{1,2,3,5,6,8\}$이므로 $B < C$

2) $a = 2$일 때
$(A-B)\cup(B-A) = \{1,5\}$ 이므로 $A < B$,
$(B-C)\cup(C-B) = \{3,5,6,8\}$ 이므로 $B < C$

3) $a \geq 6$일 경우
$(A-B)\cup(B-A) = \{1,2,5,a\}$이므로 a의 값에 관계없이 $A < B$, $(B-C)\cup(C-B) = \{2,3,5,6,a,8\}$ 또는 $\{2,3,5,6\}$ 또는 $\{2,3,5,8\}$이므로 a의 값에 관계없이 $B < C$

따라서 a는 1 또는 2이다.

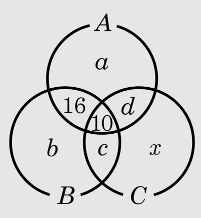
23. 60 명의 학생이 세 클럽 중 적어도 한 클럽에 속해 있다. 그 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때. $n(A) = 42$, $n(B) = 36$, $n(C) = 27$, $n(A \cap B \cap C) = 10$, $n(A \cap B) = 26$ 일 때, C 에만 속하는 학생수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 8 명

해설

다음 벤다이어그램에서 구하는 학생수는 x 이다.



$n(A \cup B \cup C) = 60$ 이므로 $a+b+c+d+x = 34 \cdots$ ㉠

$a+d = 16, b+c = 10$ 이므로 $a+b+c+d = 26 \cdots$ ㉡

㉠ - ㉡ : $x = 8$

24. 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ 의 부분집합 중에서 합이 7 의 배수가 되는 어떤 두 수도 포함하지 않는 것을 생각하자. 이와 같은 부분집합 중에서 원소의 수가 가장 많은 것은?

① 6　　② 7　　③ 14　　④ 22　　⑤ 23

해설

집합 $F = \{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ 을 7 로 나눈 나머지가 i 인 수들끼리 모은F_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ 로 분할하자.

$F_0 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

$F_1 = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}$

$F_2 = \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}$

$F_3 = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$

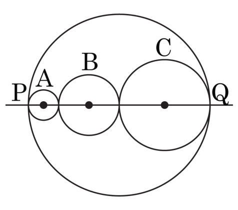
$F_4 = \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}$

$F_5 = \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\}$

$F_6 = \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}$

우리가 만들려는 최대의 부분집합은 F_0 의 원소는 많아야 1 개를 가질 수 있지만, 다른 집합의 원소는 몽땅 포함해도 된다. 또, F_1 의 원소와 F_6 의 원소는 함께 포함될 수 없다. 마찬가지로, F_2 와 F_5, F_3 와 F_4 의 원소도 함께 포함할 수 없다. 그 중에서 F_1 의 원소의 개수는 8 개 이고, 다른 F_i 의 원소의 개수는 7 개 이므로, 최대의 부분집합은 $1 + 8 + 7 + 7 = 23$(개) 의 원소를 갖는다.

25. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면

구의 겉넓이는

$S_1 = 4\pi x^2,\ S_2 = 4\pi y^2,\ S_3 = 4\pi z^2$

$4\pi(x^2+y^2+z^2) = 40\pi$

$\therefore x^2+y^2+z^2 = 10$

$(x^2+y^2+z^2)(2^2+4^2+6^2) \geq (2x+4y+6z)^2$

$10 \cdot 56 \geq (2x+4y+6z)^2$

$4\sqrt{35} \geq 2x+4y+6z$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x+4y+6z)$이므로 $8\sqrt{35}$