

1. 다음 중에서 집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① 키가 작은 학생들의 모임

② 10 에 가까운 수의 모임

③ 우리 반에서 배우는 교과목의 모임

④ 영어를 잘하는 학생들의 모임

⑤ 1 보다 작은 자연수의 모임

해설

③, ⑤는 기준이 명확하므로 집합이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$

② $4 \in A$

③ $7 \notin A$

④ $10 \notin A$

⑤ $17 \in A$

해설

$$A = \{3, 10, 17, \dots\}$$

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

④ $10 \in A$

3. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$

② $\{2, 4\}$

③ $\{4, 8\}$

④ $\{2, 8\}$

⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

4. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

5. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.

② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.

③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.

④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.

⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

6. 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 보기 중에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\emptyset \in A$

㉡ $\{\emptyset\} \subset A$

㉢ $\{1, 2\} \subset A$

㉣ $\{1, 2\} \in A$

㉤ $\{\{1, 2\}\} \subset A$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠ : $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이다.

㉡ : $\emptyset$ 이 원소이므로 $\{\emptyset\} \subset A$

㉢ : $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

㉣ : $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이다.

㉤ : $\{\{1, 2\}\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

7. 두 집합 $A = \{2, 5, a + 3\}$, $B = \{b - 3, 5, 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = B$ 이므로 $a + 3 = 9$, $b - 3 = 2$

따라서 $a = 6$, $b = 5$

$\therefore a + b = 11$

8. 집합 $X = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B = X$ 가 되는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8 개

해설

$X = \{1, 2, 4, 8\}$, $A = \{1, 2, 4\}$ 이고

$A \cup B = X$ 가 되어야 하므로 집합 B 는 원소 8을 반드시 포함해야 한다.

따라서, 집합 B 는

$\{8\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 8\}$,

$\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$

이므로 8개이다.

9. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, 주어진 식을 간단히 하면?

$$(A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24})$$

① A_{36}

② A_{24}

③ A_{18}

④ A_{12}

⑤ A_6

해설

$$\begin{aligned} & (A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24}) \\ &= (A_{36} \cup A_{18}) \cap (A_{36} \cup A_{24}) \\ &= A_{36} \cup (A_{18} \cap A_{24}) \\ &= A_{36} \cup A_{72} \quad (\because 18 \text{과 } 24 \text{의 최소공배수는 } 72) \\ &= A_{36} \end{aligned}$$

10. $p(x) : x > 0$, $q(x) : x < 1$ 일 때, ' $p(x)$ 이고 $q(x)$ ' 의 진리집합을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid x > 0\}$

② $\{x \mid 0 < x < 1\}$

③ $\{x \mid x > 1\}$

④ $\{x \mid x < 0 \text{ 또는 } x > 1\}$

⑤ $\{x \mid x < 1\}$

해설

$p(x) : x > 0$, $q(x) : x < 1$ 이므로 $p(x)$ 이고 $q(x)$ 이면 $x > 0$ 이고 $x < 1$ 이다.

즉, $\{x \mid 0 < x < 1\}$

11. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면

(가): ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'

이 때, n 이 홀수이므로

$n =$ (나) (k 는 0 또는 자연수)

이 때, $n^2 =$ (나) $^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2 은 홀수이다.

$\therefore$ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k + 1$, 0 또는 짝수

② 이, $2k - 1$, 홀수

③ 대우, $2k + 1$, 0 또는 짝수

④ 대우, $2k - 1$, 0 또는 홀수

⑤ 역, $2k + 1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로

$\therefore$ (가): 대우

n 이 홀수이므로 $\therefore$ (나): $2k + 1$

$2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수)의 형태이므로

$\therefore$ (다): 0 또는 짝수

12. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건이 아닌 것은? (단 a, b, c 는 실수)

① $p : a = b, q : ac = bc$

② $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = 0$ 또는 $b = 0$

③ $p : \triangle ABC$ 는 이등변삼각형, $q : \angle B = \angle C$

④ $p : a = 1, q : a^2 - 3a + 2 = 0$

⑤ $p : 0 < a < b, q : a^2 < b^2$

해설

① $q : ac = bc \rightarrow a = b$ 또는 $c = 0$ (참)

② $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$ (참)

③ $\angle B \neq \angle C \rightarrow \triangle ABC$ 는 이등변 삼각형이 아니다. (거짓)

반례 : $\angle C = \angle A$ 인 이등변 삼각형

④ $q : a = 1, 2$ (참)

⑤ $(0 < a < b) \subset (a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < a < b$ 또는 $b < a < 0)$

13. a, b, c 가 실수일 때, p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = b = 0$

② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b, q : ac = bc$

④ $p : a - b = 0, q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0, q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

① 명제 자체도 성립하고 역도 성립하므로 필요충분조건이다.

② (반례) $a = 1, b = 1$ 인 경우

③ (반례) 역일 때, $c = 0$ 인 경우

④ (반례) 명제와 역 모두 성립하지 않는다.

⑤ (반례) 역일 때 $a = 0, b = 0$ 인 경우 $ab = 0$ 이므로 성립하지 않는다.

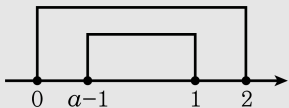
14. $0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 충분조건이 $a - 1 \leq x \leq 1$ 이고, 필요조건이 $b + 3 \leq x \leq 3$ 이다. a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m + M = -2$

해설

$0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 충분조건이 $a - 1 \leq x \leq 1$ 이므로
 $\{x \mid a - 1 \leq x \leq 1\} \subset \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$



위의 그림에서 $0 \leq a - 1 \leq 1$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 필요조건이
 $b + 3 \leq x \leq 3$ 이므로

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\} \subset \{x \mid b + 3 \leq x \leq 3\}$$



위의 그림에서 $b + 3 \leq 0$

$$\therefore b \leq -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 a 의 최솟값 $m = 1$,

㉡에서 b 의 최댓값 $M = -3$

$$\therefore m + M = 1 + (-3) = -2$$

15. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$A \subset B$ 이면 $\square$ 는 8의 약수이어야 한다. 따라서 $\square$ 는 1, 2, 4, 8의 4 개이다.

16. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 54 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 이기 위한 자연수 n 의 값은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

n 은 54를 뺀 54의 약수이므로 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27이다. 따라서 7개이다.

17. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $B = \{a_k + b | a_k \in A\}$ 가 있다. $A \cap B = \{4, 7, 9\}$ 이고, 집합 A 의 원소의 합이 32, $A \cup B$ 의 원소의 합이 62일 때, 집합 B 의 원소 중 가장 큰 수와 작은 수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \cap B$ 의 원소의 합에서 집합 A 의 원소의 합을 빼고,

$A \cup B$ 의 원소의 합을 더해 주면

집합 B 의 원소의 합이 되므로, 집합 B 의 원소의 합은 50이다.

집합 A 의 원소의 합이

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 32$ 이고,

$B = \{a_1 + b, a_2 + b, a_3 + b, a_4 + b, a_5 + b, a_6 + b\}$ 이므로

집합 B 의 원소의 합은

$a_1 + b + a_2 + b + a_3 + b + a_4 + b + a_5 + b + a_6 + b = 32 + 6b$

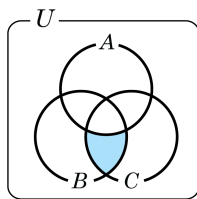
$32 + 6b = 50$ 이므로 $b = 3$ 이 된다.

교집합의 원소인 4, 7, 9는 집합 A 와 B 의 원소이므로 각각 3을 더한 7, 10, 12도 집합 B 의 원소가 된다.

또 집합 B 의 원소의 합이 50이므로 4, 7, 9, 10, 12와 8이 된다.

$\therefore B = \{4, 7, 8, 9, 10, 12\}$

18. 전체집합 U 에 대하여 세 부분집합 A, B, C 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 색칠된 부분을 나타내는 집합을 모두 고르면?



① $A^c \cap B \cap C$

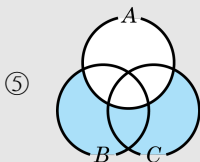
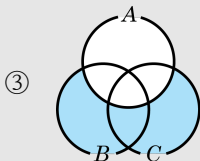
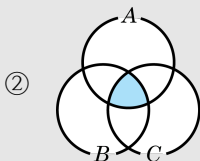
② $A \cap B \cap C$

③ $(B \cup C) - A$

④ $(B \cap C) - A$

⑤ $(B - A) \cup (C - A)$

해설



19. 두 조건 $p_n, q_n (n = 1, 2)$ 에 대하여 $P_n = \{x|x \text{는 } p_n \text{을 만족한다.}\}$, $Q_n = \{x|x \text{는 } q_n \text{을 만족한다.}\}$ 이고, p_1 은 p_2 이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 p_2 이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n 이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1$, $P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

20. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \end{aligned}$$

- ① $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ② $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$
- ③ $\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c|$
- ④ $a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2$
- ⑤ $a + b + c \geq 3^3 \sqrt{abc}$

해설

$$\frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

③의 경우 양변을 제곱하여 빼면

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - |a + b + c|^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c|$$

21. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ 의 부분집합 S 가 다음 조건을 만족할 때 $n(S)$ 의 최댓값은?

$a \in S, b \in S$ ($a \neq b$) 이면 $a + b \neq 5k$
(k 는 자연수)

① 6

② 7

③ 10

④ 15

⑤ 20

해설

1에서 32까지의 자연수를 5로 나누었을 때, 나머지에 따라 5개의 집합으로 분류하면

$$A_0 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31\}$$

$$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32\}$$

$$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$$

$$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$$

구하는 집합 S 의 원소는 A_0 의 원소 중 1개, A_1 과 A_4 의 원소 중 한 쪽 것만 택해야 하므로 큰 쪽인 A_1 의 7개, A_2 와 A_3 중 A_2 의 7개를 택하면 $n(S)$ 의 최댓값은 15(개)이다.

22. 두 집합 P, Q 에 대하여 $(P - Q) \cup (Q - P)$ 의 가장 작은 원소가 P 의 원소이면 $P < Q$, Q 의 원소이면 $P > Q$ 라고 정의한다. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ 에 대하여 $A < B$, $B < C$ 를 만족하기 위한 자연수 a 를 모두 구하여라. (단, $n(B) = 4$ 이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

1) $a = 1$ 일 때

$$(A - B) \cup (B - A) = \{2, 5\} \text{ 이므로 } A < B,$$

$$(B - C) \cup (C - B) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B < C$$

2) $a = 2$ 일 때

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \text{ 이므로 } A < B,$$

$$(B - C) \cup (C - B) = \{3, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B < C$$

3) $a \geq 6$ 일 경우

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 5, a\} \text{ 이므로 } a \text{ 의 값에 관계없이}$$

$$A < B, (B - C) \cup (C - B) = \{2, 3, 5, 6, a, 8\} \text{ 또는 } \{2, 3, 5, 6\}$$

$$\text{또는 } \{2, 3, 5, 8\} \text{ 이므로 } a \text{ 의 값에 관계없이 } B < C$$

따라서 a 는 1 또는 2 이다.

23. 60 명의 학생이 세 클럽 중 적어도 한 클럽에 속해 있다. 그 학생의 집합을 각각 A , B , C 라 할 때. $n(A) = 42$, $n(B) = 36$, $n(C) = 27$, $n(A \cap B \cap C) = 10$, $n(A \cap B) = 26$ 일 때, C 에만 속하는 학생수를 구하여라.



답 :

명



정답 : 8명

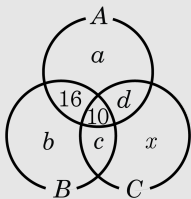
해설

다음 벤다이어그램에서 구하는 학생수는 x 이다.

$$n(A \cup B \cup C) = 60 \text{ 이므로 } a + b + c + d + x = 60 \dots \textcircled{㉠}$$

$$a + d = 16, b + c = 10 \text{ 이므로 } a + b + c + d = 26 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} : x = 8$$



24. 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ 의 부분집합 중에서 합이 7의 배수가 되는 어떤 두 수도 포함하지 않는 것을 생각하자. 이와 같은 부분집합 중에서 원소의 수가 가장 많은 것은?

① 6

② 7

③ 14

④ 22

⑤ 23

해설

집합 $F = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ 을 7로 나눈 나머지가 i 인 수들끼리 모은 F_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 6$)로 분할하자.

$$F_0 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$$

$$F_1 = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}$$

$$F_2 = \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}$$

$$F_3 = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$$

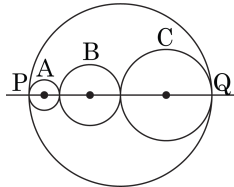
$$F_4 = \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}$$

$$F_5 = \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\}$$

$$F_6 = \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}$$

우리가 만들려는 최대의 부분집합은 F_0 의 원소는 많아야 1개를 가질 수 있지만, 다른 집합의 원소는 몽땅 포함해도 된다. 또, F_1 의 원소와 F_6 의 원소는 함께 포함될 수 없다. 마찬가지로, F_2 와 F_5 , F_3 와 F_4 의 원소도 함께 포함할 수 없다. 그 중에서 F_1 의 원소의 개수는 8개 이고, 다른 F_i 의 원소의 개수는 7개 이므로, 최대의 부분집합은 $1 + 8 + 7 + 7 = 23$ (개)의 원소를 갖는다.

25. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$

② $6\sqrt{35}$

③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$

⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
구의 겹넓이는

$$S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$$

$$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$