1. 이차방정식 $2x^2 - ax + 5b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값을 최소가 되게 하는 b 의 값은?
(단, a, b 는 양의 정수)

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설
$D = a^2 - 4 \times 2 \times 5 \times b = 0$
$a^2 = 2^2 \times 2 \times 5 \times b$
따라서 a 가 최소가 되게 하는 b 의 값은 $2 \times 5 = 10$ 이다.

2. 한 개의 주사위를 두 번 던져 처음 나온 눈의 수를 k , 두 번째 나온 눈의 수를 m 이라고 할 때, 이차방정식 $x^2 + (k-1)x + m = 0$ 의 해가 1 개가 되는 확률은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{1}{18}$　④ $\frac{1}{9}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D = (k-1)^2 - 4m = 0$
$(k-1)^2 = 4m$ 이므로
$(k,\ m) = (3, 1),\ (5, 4)$
따라서 확률은 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 이다.

3. 이차방정식 $3x^2-6x+k+2=0$의 근의 개수가 1개일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $3x^2-6x+k+2=0$은 중근을 갖는다.

$3x^2-6x+k+2=0$

$3(x^2-2x)=-k-2$

$3(x^2-2x+1)=-k-2+3$

$3(x-1)^2=-k+1$

중근을 가져야 하므로 $-k+1=0$

$\therefore\ k=1$

4. 이차방정식 $x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값이 최대가 되도록 b 의 값을 정하려고 한다. 이 때, a 의 값은? (단, a , b 는 두 자리의 자연수)

① 18　　② 27　　③ 36　　④ 45　　⑤ 54

해설

$x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가지려면
$D = 0,\ \ a^2 - 4 \times 9b = 0$
$\therefore a^2 = 36b = 6^2 b$
따라서 b 는 제곱수이어야 하고, b 가 최대일 때 a 가 최대가 된다.
두 자리의 자연수 중 가장 큰 제곱수는 81 이므로 $b = 81$ 이다.
$\therefore\ a^2 = 6^2 \times 81 = (6 \times 9)^2 = 54^2$
$\therefore\ a = 54$ ($\because\ a$는 자연수)

5. $\dfrac{\sqrt{9^{11}-81^5}}{\sqrt{27^6-9^8}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9^{11}-81^5}}{\sqrt{27^6-9^8}} &= \frac{\sqrt{(3^2)^{11}-(3^4)^5}}{\sqrt{(3^3)^6-(3^2)^8}} \\ &= \frac{\sqrt{3^{22}-3^{20}}}{\sqrt{3^{18}-3^{16}}} \\ &= \frac{\sqrt{3^{20}(3^2-1)}}{\sqrt{3^{16}(3^2-1)}} \\ &= \sqrt{3^4} = 9\end{aligned}$$

6. $\sqrt{3333333333-66666}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $33333\sqrt{3}$

해설

$33333 = a$ 로 놓으면

$3333333333 = a \times 10^5 + a$ 이고

$66666 = 2a$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\therefore\ & \sqrt{3333333333-66666} \\
&= \sqrt{(a\times 10^5)+a-2a} \\
&= \sqrt{a(10^5-1)} \\
&= \sqrt{a\times 99999} \\
&= \sqrt{3\times 11111\times 3^2\times 11111} \\
&= 33333\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

7. $\dfrac{\sqrt{4^{11}-16^{3}}}{\sqrt{8^{8}-4^{7}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\frac{\sqrt{4^{11}-16^{3}}}{\sqrt{8^{8}-4^{7}}}=\frac{\sqrt{(2^{2})^{11}-(2^{4})^{3}}}{\sqrt{(2^{3})^{8}-(2^{2})^{7}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2^{22}-2^{12}}}{\sqrt{2^{24}-2^{14}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2^{12}(2^{10}-1)}}{\sqrt{2^{14}(2^{10}-1)}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2^{2}}}=\frac{1}{2}$$

8. $a+b=-1$, $(a+1)(b+1)=-12$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$a^3+b^3+a^2b+ab^2$$

① -25 ② -24 ③ -23 ④ -22 ⑤ -21

해설

$(a+1)(b+1)=ab+(a+b)+1=-12$

$a+b=-1$ 이므로 $ab=-12$

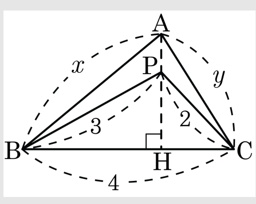
$$\begin{aligned} a^3+b^3+a^2b+ab^2 &= a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ &= a^2(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2+b^2\right) \\ &= (a+b)\left\{(a+b)^2-2ab\right\} \\ &= (-1) \\ &\quad \times\left\{(-1)^2-2\times(-12)\right\} \\ &= (-1)\times 25=-25 \end{aligned}$$

9. $\overline{AB}+\overline{AC}=6,\ \overline{BC}=4$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 AH 위의 한 점 P 를 $\overline{BP}=3,\ \overline{CP}=2$ 가 되도록 잡는다. 이때 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



다음 그림과 같이 변 AB 의 길이를 x , 변 AC 의 길이를 y 라 하면 $x+y=6$ 선분 BH 의 길이를 a 라 하면 선분 HC 는 $4-a$ 이다.

$\triangle$ABH 에서 $\overline{AH}^2=x^2-a^2$

$\triangle$AHC 에서 $\overline{AH}^2=y^2-(4-a)^2$

$\therefore\ x^2-a^2=y^2-(4-a)^2\cdots$①

$\triangle$PBH 에서 $\overline{PH}^2=3^2-a^2$

$\triangle$PHC 에서 $\overline{PH}^2=2^2-(4-a)^2$

$\therefore\ 3^2-a^2=2^2-(4-a)^2\cdots$②

① − ② 를 하면 $x^2-3^2=y^2-2^2$ 이므로

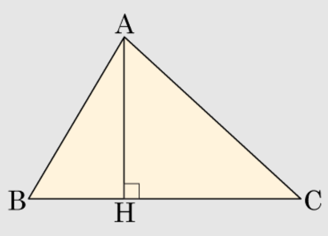
$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=x^2-y^2=3^2-2^2=5$ 이다.

10. 넓이가 k 인 삼각형의 세 변의 길이의 비가 $3 : 4 : 5$ 일 때, 가장 긴 변의 길이를 k 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{5\sqrt{6k}}{6}$

해설



삼각형의 세 변의 길이를 각각 $3a,\ 4a,\ 5a$ 라 하고 $\overline{BH} = x$ 라 하면

$\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2$ 이므로

$(3a)^2 - x^2 = (4a)^2 - (5a - x)^2$

$\therefore\ x = \dfrac{9}{5}a$

따라서 $\overline{AH} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\dfrac{9}{5}a\right)^2} = \dfrac{12}{5}a$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 5a \times \dfrac{12}{5}a = 6a^2 = k$ 이므로

$\therefore a = \dfrac{\sqrt{6k}}{6}$

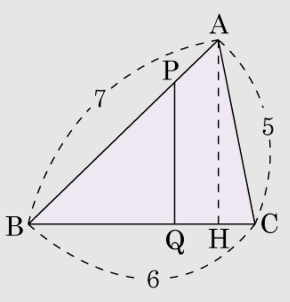
따라서 가장 긴 변을 k 를 사용한 식으로 나타내면 $5 \times \dfrac{\sqrt{6k}}{6} = \dfrac{5\sqrt{6k}}{6}$ 이다.

11. $\overline{AB} = 7,\ \overline{BC} = 6,\ \overline{AC} = 5$ 인 삼각형 ABC 에서 변 BC 에 수직인 선분 PQ 를 그으면 삼각형 APQ 의 넓이가 삼각형 ABC 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이 된다. 이때 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{6}{5}\sqrt{10}$

해설



헤론의 공식에 의해 $s = \frac{5+6+7}{2} = 9$ 에서

$\therefore \triangle ABC = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$

다음 그림과 같이 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AH} = 6\sqrt{6}, \quad \therefore \overline{AH} = 2\sqrt{6}$

$\triangle ABH$ 에서 $\overline{BH} = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{6})^2} = 5$

또, $\triangle ABH \backsim \triangle PBQ$ 이므로

$2\sqrt{6} : \overline{PQ} = 5 : \overline{BQ}$

$\therefore \overline{BQ} = \frac{5\sqrt{6}}{12}\overline{PQ}$

그런데 $\overline{PQ}$ 가 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하므로

$\frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{PQ} = 3\sqrt{6}, \quad \frac{5\sqrt{6}}{12}\overline{PQ}^2 = 6\sqrt{6}$

$\therefore \overline{PQ} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

12. 사각형 ABCD 의 두 대각선 AC, BD 의 길이는 각각 5, 6 이고, 대각선 AC, BD 의 중점을 각각 M, N 이라 할 때, $\overline{\mathrm{MN}} = 1$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

보조선 BM 와 DM 를 그으면
$\triangle$ABC 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = 2(\overline{\mathrm{BM}^2} + \overline{\mathrm{AM}^2}) \cdots ①$
$\triangle$ADC 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 = 2(\overline{\mathrm{DM}^2} + \overline{\mathrm{AM}^2}) \cdots ②$
① + ② 을 하면
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2$
$= 2(\overline{\mathrm{BM}^2} + \overline{\mathrm{DM}^2}) + 4\overline{\mathrm{AM}^2}$
$\triangle$BMD 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{BM}^2} + \overline{\mathrm{DM}^2} = 2(\overline{\mathrm{MN}^2} + \overline{\mathrm{DN}^2}) \cdots ③$
또, $\overline{\mathrm{AC}} = 2\overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}^2} = 4\overline{\mathrm{AM}^2} \cdots ④$
$\overline{\mathrm{BD}} = 2\overline{\mathrm{DN}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}^2} = 4\overline{\mathrm{DN}^2} \cdots ⑤$
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2$
$= 2(\overline{\mathrm{BM}^2} + \overline{\mathrm{DM}^2}) + 4\overline{\mathrm{AM}^2}$
$= 4(\overline{\mathrm{DN}^2} + \overline{\mathrm{MN}^2}) + 4\overline{\mathrm{AM}^2}$ ($\because$ ③)
$= 4\overline{\mathrm{AM}^2} + 4\overline{\mathrm{DN}^2} + 4\overline{\mathrm{MN}^2}$
$= \overline{\mathrm{AC}^2} + \overline{\mathrm{BD}^2} + 4\overline{\mathrm{MN}^2}$ ($\because$ ④, ⑤)
따라서, $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2$
$= 5^2 + 6^2 + 4 = 65$ 이다.