1. 이차방정식 $2x^2 - ax + 5b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값을 최소가 되게 하는 b 의 값은?
(단, a, b 는 양의 정수)

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$D = a^2 - 4 \times 2 \times 5 \times b = 0$
$a^2 = 2^2 \times 2 \times 5 \times b$
따라서 a 가 최소가 되게 하는 b 의 값은 $2 \times 5 = 10$ 이다.

2. 한 개의 주사위를 두 번 던져 처음 나온 눈의 수를 k , 두 번째 나온 눈의 수를 m 이라고 할 때, 이차방정식 $x^2+(k-1)x+m=0$의 해가 1개가 되는 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$D=(k-1)^2-4m=0$

$(k-1)^2=4m$ 이므로

$(k,\ m)=(3,1),\ (5,4)$

따라서 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ 이다.

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$의 근의 개수가 1개일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$은 중근을 갖는다.

$3x^2 - 6x + k + 2 = 0$

$3(x^2 - 2x) = -k - 2$

$3(x^2 - 2x + 1) = -k - 2 + 3$

$3(x - 1)^2 = -k + 1$

중근을 가져야 하므로 $-k + 1 = 0$

$\therefore\ k = 1$

4. 이차방정식 $x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값이 최대가 되도록 b 의 값을 정하려고 한다. 이 때, a 의 값은? (단, a , b 는 두 자리의 자연수)

① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

$x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가지려면

$D = 0, \quad a^2 - 4 \times 9b = 0$

$\therefore a^2 = 36b = 6^2 b$

따라서 b 는 제곱수이어야 하고, b 가 최대일 때 a 가 최대가 된다.

두 자리의 자연수 중 가장 큰 제곱수는 81 이므로 $b = 81$ 이다.

$\therefore \ a^2 = 6^2 \times 81 = (6 \times 9)^2 = 54^2$

$\therefore \ a = 54$ ($\because \ a$는 자연수)

5. $\dfrac{\sqrt{9^{11}-81^5}}{\sqrt{27^6-9^8}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9^{11}-81^5}}{\sqrt{27^6-9^8}} &= \frac{\sqrt{(3^2)^{11}-(3^4)^5}}{\sqrt{(3^3)^6-(3^2)^8}}\\ &= \frac{\sqrt{3^{22}-3^{20}}}{\sqrt{3^{18}-3^{16}}}\\ &= \frac{\sqrt{3^{20}(3^2-1)}}{\sqrt{3^{16}(3^2-1)}}\\ &= \sqrt{3^4}=9\end{aligned}$$

6. $\sqrt{3333333333-66666}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $33333\sqrt{3}$

해설

$33333=a$ 로 놓으면

$3333333333=a\times10^5+a$ 이고

$66666=2a$ 이므로

$\therefore\ \sqrt{3333333333-66666}$

$=\sqrt{(a\times10^5)+a-2a}$

$=\sqrt{a(10^5-1)}$

$=\sqrt{a\times99999}$

$=\sqrt{3\times11111\times3^2\times11111}$

$=33333\sqrt{3}$

7. $\dfrac{\sqrt{4^{11}-16^3}}{\sqrt{8^8-4^7}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4^{11}-16^3}}{\sqrt{8^8-4^7}} &= \frac{\sqrt{(2^2)^{11}-(2^4)^3}}{\sqrt{(2^3)^8-(2^2)^7}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{22}-2^{12}}}{\sqrt{2^{24}-2^{14}}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{12}(2^{10}-1)}}{\sqrt{2^{14}(2^{10}-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. $a+b=-1$, $(a+1)(b+1)=-12$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$a^3+b^3+a^2b+ab^2$$

① -25 ② -24 ③ -23 ④ -22 ⑤ -21

해설

$(a+1)(b+1)=ab+(a+b)+1=-12$

$a+b=-1$ 이므로 $ab=-12$

$$\begin{aligned} a^3+b^3+a^2b+ab^2 &= a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ &= a^2(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2+b^2\right) \\ &= (a+b)\left\{(a+b)^2-2ab\right\} \\ &= (-1) \\ &\quad \times\left\{(-1)^2-2\times(-12)\right\} \\ &= (-1)\times 25=-25 \end{aligned}$$

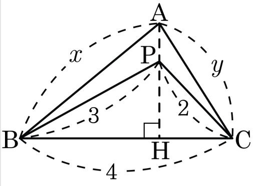
9. $\overline{AB}+\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=4$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 AH 위의 한 점 P 를 $\overline{BP}=3$, $\overline{CP}=2$ 가 되도록 잡는다. 이때 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

다음 그림과 같이 변 AB 의 길이를 x , 변 AC 의 길이를 y 라 하면 $x+y=6$ 선분 BH 의 길이를 a 라 하면 선분 HC 는 $4-a$ 이다.



$\triangle$ABH 에서 $\overline{AH}^2=x^2-a^2$

$\triangle$AHC 에서 $\overline{AH}^2=y^2-(4-a)^2$

$\therefore\ x^2-a^2=y^2-(4-a)^2\cdots$ ①

$\triangle$PBH 에서 $\overline{PH}^2=3^2-a^2$

$\triangle$PHC 에서 $\overline{PH}^2=2^2-(4-a)^2$

$\therefore\ 3^2-a^2=2^2-(4-a)^2\cdots$ ②

① − ② 를 하면 $x^2-3^2=y^2-2^2$ 이므로

$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=x^2-y^2=3^2-2^2=5$ 이다.

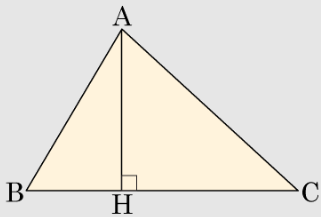
10. 넓이가 k 인 삼각형의 세 변의 길이의 비가 $3:4:5$ 일 때, 가장 긴 변의 길이를 k 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{5\sqrt{6k}}{6}$

해설

삼각형의 세 변의 길이를 각각 $3a$, $4a$, $5a$ 라 하고 $\overline{\mathrm{BH}}=x$ 라 하면



$\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2$ 이므로

$(3a)^2-x^2=(4a)^2-(5a-x)^2$

$\therefore\ x=\dfrac{9}{5}a$

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(3a)^2-\left(\dfrac{9}{5}a\right)^2}=\dfrac{12}{5}a$

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times5a\times\dfrac{12}{5}a=6a^2=k$ 이므로

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{6k}}{6}$

따라서 가장 긴 변을 k 를 사용한 식으로 나타내면 $5\times\dfrac{\sqrt{6k}}{6}=$

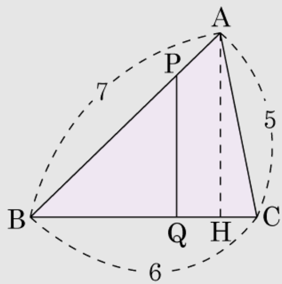
$\dfrac{5\sqrt{6k}}{6}$ 이다.

11. $\overline{AB}=7,\ \overline{BC}=6,\ \overline{AC}=5$ 인 삼각형 ABC 에서 변 BC 에 수직인 선분 PQ 를 그으면 삼각형 APQ 의 넓이가 삼각형 ABC 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이 된다. 이때 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{6}{5}\sqrt{10}$

해설



헤론의 공식에 의해 $s=\frac{5+6+7}{2}=9$ 에서

$\therefore\ \triangle ABC=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$

다음 그림과 같이 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\frac{1}{2}\times 6\times\overline{AH}=6\sqrt{6},\quad \therefore\ \overline{AH}=2\sqrt{6}$

$\triangle ABH$ 에서 $\overline{BH}=\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}=5$

또, $\triangle ABH \backsim \triangle PBQ$ 이므로

$2\sqrt{6}:\overline{PQ}=5:\overline{BQ}$

$\therefore\ \overline{BQ}=\frac{5\sqrt{6}}{12}\overline{PQ}$

그런데 $\overline{PQ}$ 가 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{PQ}=3\sqrt{6},\quad \frac{5\sqrt{6}}{12}\overline{PQ}^2=6\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$

12. 사각형 ABCD 의 두 대각선 AC, BD 의 길이는 각각 5, 6 이고, 대각선 AC, BD 의 중점을 각각 M, N 이라 할 때, $\overline{\mathrm{MN}}=1$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

보조선 BM 와 DM 를 그으면
$\triangle$ABC 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=2(\overline{\mathrm{BM}^2}+\overline{\mathrm{AM}^2})\cdots$①
$\triangle$ADC 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2=2(\overline{\mathrm{DM}^2}+\overline{\mathrm{AM}^2})\cdots$②
① + ② 을 하면
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2$
$=2(\overline{\mathrm{BM}^2}+\overline{\mathrm{DM}^2})+4\overline{\mathrm{AM}^2}$
$\triangle$BMD 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{BM}^2}+\overline{\mathrm{DM}^2}=2(\overline{\mathrm{MN}^2}+\overline{\mathrm{DN}^2})\cdots$③
또, $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}^2}=4\overline{\mathrm{AM}^2}\cdots$④
$\overline{\mathrm{BD}}=2\overline{\mathrm{DN}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}^2}=4\overline{\mathrm{DN}^2}\cdots$⑤
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2$
$=2(\overline{\mathrm{BM}^2}+\overline{\mathrm{DM}^2})+4\overline{\mathrm{AM}^2}$
$=4(\overline{\mathrm{DN}^2}+\overline{\mathrm{MN}^2})+4\overline{\mathrm{AM}^2}$ ($\because$ ③)
$=4\overline{\mathrm{AM}^2}+4\overline{\mathrm{DN}^2}+4\overline{\mathrm{MN}^2}$
$=\overline{\mathrm{AC}^2}+\overline{\mathrm{BD}^2}+4\overline{\mathrm{MN}^2}$ ($\because$ ④, ⑤)

따라서, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2$
$=5^2+6^2+4=65$ 이다.