

1. 첫째항이 1, 공비가 2, 끝항이 512인 등비수열의 합은?

① 511

② 512

③ 1023

④ 1024

⑤ 2047

해설

$$512 = 1 \cdot 2^{n-1} \text{ 에서 } n = 10$$

$$\therefore a = 1, r = 2, n = 10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

2. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

①

61

② 122

③ 244

④ 361

⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ 에서}$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

3. 제 4항이 6, 제 7항이 162 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$

② $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$

③ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$

④ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$

⑤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

4. 제 4항이 -16 , 제 7항이 128 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $\frac{1}{3}(2^{20} - 1)$

② $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$

③ $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$

④ $2(1 - 2^{20})$

⑤ $2(1 + 2^{20})$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = -16, ar^6 = 128$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2, a = 2$$

$$S_{20} = \frac{2 \{1 - (-2)^{20}\}}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{2}{3}(1 - 2^{20})$$

5. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

6. 첫째항부터 제3 항까지의 합이 7, 제4 항부터 제6 항까지의 합이 56 인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9 항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498

② 502

③ 511

④ 512

⑤ 524

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 63 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $7(r^3 + 1) = 63$

$$r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r = 2$$

$r = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $a(2^3 - 1) = 7 \quad \therefore a = 1$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 512 - 1 = 511$$

7. 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000, 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

8. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

- ① 11 항 ② 12 항 ③ 13 항 ④ 14 항 ⑤ 15 항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n - 1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

9. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100 보다 크게 되는가?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{ 인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, 2^6 = 64 \text{ 이므로}$$

$$n = 6$$

10. 수열 $8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$ 일 때, $a_1 + a_4$ 의 값은?

① 111

② 112

③ 113

④ 114

⑤ 115

해설

$n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \dots\dots \textcircled{㉠}$

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 1 - (2 \cdot 3^{n-1} - 1) = 4 \cdot 3^{n-1} \dots\dots \textcircled{㉡}$

그런데 $\textcircled{㉡}$ 에 $n = 1$ 을 대입하면 $\textcircled{㉠}$ 과 다르므로 이 수열은 제2항부터 등비수열을 이룬다.

$$\therefore a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2), \quad a_1 = 5$$

$$\therefore a_1 + a_4 = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$$