

1. 방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2, -3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$

② 3, 7, 5

③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$

⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2, -3)$ 이고 반지름의 길이가

r 인 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - r^2 = 0$$

이것이 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 과 일치해야 하므로

$$A = 4, B = 6, 13 - r^2 = 0$$

$$13 - r^2 = 0 \text{ 에서}$$

$$r = \sqrt{13} \quad (\because r > 0)$$

따라서, $A = 4, B = 6$ 이고

반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

2. 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$
- ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
- ③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$
- ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1) 을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
 $(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$
 $\therefore A + B - C = 2 \cdots \textcircled{1}$
 $1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore A + B + C = -2 \cdots \textcircled{2}$
 $0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore B + C = -1 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면
 $A = -1, B = 1, C = -2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

3. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(5, -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r$ 의 값은?
(단, a, b, r 은 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 $\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$
 $(5, -3)$ 을 지나므로 대입하면,
 $(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 = r^2 \quad r = 5$
 $\therefore a + b + r = 2 + 1 + 5 = 8$

4. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

- ㉠

$x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- ㉡

$(x + 1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y + 3)^2 = 2$
- ㉢

$x^2 + y^2 = 2, \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$
- ㉣

$x^2 + y^2 = 4, \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$
- ㉤

$x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

- ①

㉠
- ②

㉠, ㉤
- ③

㉡
- ④

㉢, ㉣
- ⑤

㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

$|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.

㉠ 만나지 않는다.

㉢ 내접한다.

㉤ 외접한다.

5. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

6. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

7. 점 $(3, 5)$ 가 평행이동에 의해서 점 $(-4, 6)$ 으로 옮겨질 때, 점 $(0, 0)$ 은 이 평행이동에 의해서 어느 점으로 이동하는가?

① $(-7, -1)$

② $(-7, 1)$

③ $(7, -1)$

④ $(7, 1)$

⑤ $(7, 7)$

해설

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -7 , y 축의 방향으로 $+1$ 만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(0-7, 0+1) = (-7, 1)$ 로 이동하게 된다.

8. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$

② $y = x^2 + 2x + 2$

③ $y = x^2 + 2x + 3$

④ $y = x^2 - 6x + 8$

⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 에서

$x + 2 = x', y - 1 = y'$ 라 하자.

$x = x' - 2$ $y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,

$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$

$y' = x'^2 - 6x' + 10$ 에서 $y = x^2 - 6x + 10$

9. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

- (i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$
(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$
(i), (ii)로부터 $2b - 1 = 9 \quad \therefore b = 5$

10. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 = 4$

③ $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

④ $x^2 + (y - 4)^2 = 16$

⑤ $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0)이고,
선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점은 (-1, 0) ,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

11. 점 $(-4, 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이 때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점 $(-4, 2)$ 를 지나고
 x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 (r > 0)$
 $(-4+r)^2 + (2-r)^2 = r^2$
 $16 - 8r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2, (r-2)(r-10) = 0$
 $\therefore r = 2$ 또는 $r = 10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$

12. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

13. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ 의 공통 외접선의 길이는?

① 21

② 1

③ 10

④ $\sqrt{7}$

⑤ $\sqrt{15}$

해설

$x^2 - 8x + y^2 + 15 = (x - 4)^2 + y^2 = 1$ 이므로

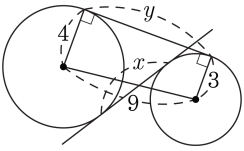
두 원의 중심간 거리는 4 이고

두 원의 반지름이 각각 2, 1 이므로

피타고라스의 정리에 의해

두 원의 공통 외접선의 길이는 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$

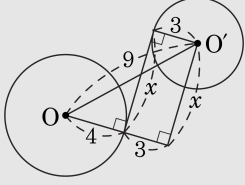
14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



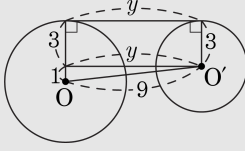
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$$9^2 = (4 + 3)^2 + x^2 \quad \therefore x^2 = 9^2 - 7^2$$



$$9^2 = y^2 + (4 - 3)^2 \quad \therefore y^2 = 9^2 - 1^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$$

15. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

16. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6) 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

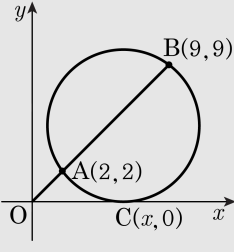
$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

17. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$$

18. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2 |x| \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 = 2 \mid x + y \mid \cdots \textcircled{L}$$

Ⓣ)과 Ⓛ)에서 $2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x + y$
 $\therefore x \mid y = -x$

$$\therefore x + y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{c}$$

㉠과 ㉡의 교점의 개수는 다음 그림
에 나타내었다.

에서 5개이다.

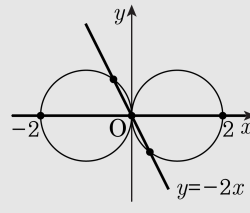
실제로, 교점을 구하면

$$(0, 0), (\pm 2, 0),$$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5}\right)$$

(복부호동순)

(복부호동순)



19. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선

$$y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b \text{ 가 된다.}$$

이 포물선 $y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 와

직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로

두 식을 연립하면 $(x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.

$$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0 \text{ 이}$$

중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$$

$$\therefore b = 2a + 3$$

$$\text{따라서, } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+3)^2}$$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{6}{5} \text{ 일 때,}$$

최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

20. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①은 원 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로

두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의

중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

21. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

- ㉠ (1, 1) ㉡ (1, 2) ㉢ (-1, 1)
㉣ (-1, -1) ㉤ (1, -1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 O(0, 0) 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 A(2, 2) 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 P(1, 1)
이다.

22. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 90° 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

- ① πa

② $\sqrt{2}\pi a$

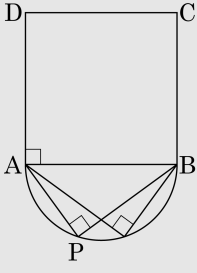
③ $2\pi a$
- ④ $2\sqrt{2}\pi a$

⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 90° 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로
 $2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$



23. 세 원 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a - b$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{95}}{5}$
 ② $\frac{\sqrt{101}}{5}$
 ③ $\frac{\sqrt{105}}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{110}}{5}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$
 $\therefore 2x + y - 6 = 0 \dots\dots\textcircled{1}$
 원 C_3 의 방정식을 변형하면
 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - 25 = 0$ 이고,
 두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은
 $(2a - 4)x + (2b - 4)y - (a^2 + b^2 - 29) = 0 \dots\textcircled{2}$
 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로
 $\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$
 $\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1}$ 에서 $2a - 4 = 4b - 8$
 $\therefore a = 2b - 2 \dots\dots\textcircled{3}$
 $\frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$ 에 $\textcircled{3}$ 을 대입하면
 $12b - 24 = (2b - 2)^2 + b^2 - 29$
 $5b^2 - 20b - 1 = 0$
 $\therefore b = \frac{10 \pm \sqrt{105}}{5}$
 그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \frac{10 + \sqrt{105}}{5}$
 $\therefore a - b = \frac{\sqrt{105}}{5}$

24. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1 y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1 y_1}$ 이므로

$x_1 y_1$ 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1 y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

25. A(3, -1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 6 = 0, 2x + y - 4 = 0$

② $x - 2y - 5 = 0, 2x + y - 5 = 0$

③ $x - 2y - 4 = 0, 2x + y - 5 = 0$

④ $x - 2y - 3 = 0, 2x + y - 4 = 0$

⑤ $x - 2y - 2 = 0, 2x + y - 3 = 0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면, $y = m(x - 3) - 1$ 접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, -2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이므로}$$

접선의 방정식은 $x - 2y - 5 = 0$ or $2x + y - 5 = 0$

26. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4 \text{ , } (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
- ② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
- ③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
- ④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
- ⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Gamma}}$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Delta}}$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$

$\cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Theta}}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ 과 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
접하므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{A}}}$

또, 원 $\textcircled{\tiny{\Delta}}$ 도 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$

$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{B}}}$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{\tiny{\text{A}}} \div \textcircled{\tiny{\text{B}}}$ 을 하면

$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$

$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$24a^2 + 49 = 0$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

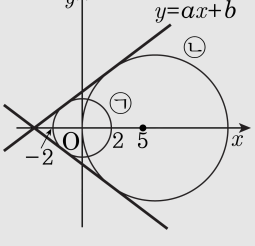
$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)



27. 두 점 A(-3, 6), B(8, -1)와 직선 $x + y + 1 = 0$ 이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $AP + BP$ 를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

A(-3, 6)의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $A'(a, b)$ 라 하면

$$\frac{a-3}{2} + \frac{b+6}{2} + 1 = 0, a+b = -5 \cdots \textcircled{1}$$

$AA' \perp l$ 이므로, AA' 의 기울기는 1이다.

$$\frac{b-6}{a+3} = 1, a-b = -9 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 2a = -14, a = -7, b = 2$$

$$\therefore A'(-7, 2)$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \leq \overline{A'B}$$

즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이고,

이 때 점 P는 A', B와 일직선상에 있으므로,

$\overline{A'B}$ 의 기울기는 $\overline{BP}$ 의 기울기와 같다.

$A'(-7, 2)$, $B(8, -1)$, $P(m, n)$ 에서

$$\frac{-1-2}{8-(-7)} = \frac{n+1}{m-8},$$

$$m+5n = 3 \cdots \textcircled{3}$$

점 P는 직선 l 위에 있으므로, $m+n = -1 \cdots \textcircled{4}$

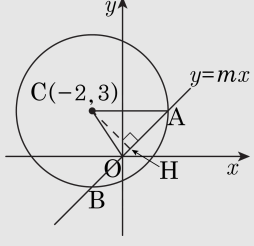
$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } m = -2, n = 1$$

$$\therefore P(-2, 1)$$

28. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$
- ② $-\frac{2}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 $C(-2, 3)$ 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 $\triangle CAH$ 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$
 $\hspace{10em} = 25 - \overline{CH}^2$
따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.
 $\triangle COH$ 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$
 $\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는
 $\overline{CH} = \overline{CO}$ ($\overline{OH} = 0$) 일 때이므로
 $\overline{CO} \perp \overline{AB}$
직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

29. 다음 중 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에 접하고 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x + \sqrt{3}y = 1$ ② $\sqrt{3}x + y = 1$ ③ $x - \sqrt{3}y = -1$

④ $\sqrt{3}x - y = -3$ ⑤ $x + y = 2$

해설

원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하기 위해서는 중심 $(1,0)$ 을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$ 을 지나는 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은

$$y = m(x-1), mx - y - m = 0$$

중심 $(-1,0)$ 에서 이 직선에 이르는 거리가 반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,

$$x + \sqrt{3}y = 1 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 1$$

30. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$

② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$

④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{AB}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots \textcircled{1}$$

그리고 $\overline{AB}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m \left(\frac{a+c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b+d = m(a+c) \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$a-c = \frac{b+d}{a+c} (d-a)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$