1. 방정식 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2,-3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$ ② 3, 7, 5 ③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$ ⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2,-3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$
$x^2+y^2+4x+6y+13-r^2=0$
이것이 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 과 일치해야 하므로
$A=4, B=6, 13-r^2=0$
$13-r^2=0$ 에서
$r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$
따라서, $A=4, B=6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

2. 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-x+y-2=0$
② $x^2+y^2-2x+3y-4=0$
③ $x^2+y^2+x-4y-5=0$
④ $x^2+y^2+3x-y-1=0$
⑤ $x^2+y^2-2x+4y-2=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$으로 놓으면
이 원이 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$ 을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
$(-1)^2+(-1)^2+\mathrm{A}\cdot(-1)+\mathrm{B}\cdot(-1)+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}=2\cdots$㉠
$1^2+1^2+\mathrm{A}\cdot1+\mathrm{B}\cdot1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=-2\cdots$㉡
$0^2+1^2+\mathrm{A}\cdot0+\mathrm{B}\cdot1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{B}+\mathrm{C}=-1\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$\mathrm{A}=-1,\ \mathrm{B}=1,\ \mathrm{C}=-2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x+y-2=0$

3. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$

$\therefore$ 중심은 $(2,1)$ 이다.

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,

$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$

$\therefore \quad a+b+r=2+1+5=8$

4. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
㉡ $(x+1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y+3)^2 = 2$
㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$
㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$
㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

① ㉠　　② ㉠, ㉤　　③ ㉡

④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

$|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.

㉡ 만나지 않는다.

㉢ 내접한다.

㉣ 외접한다.

5. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

6. 원 $x^2 + y^2 = 8$과 직선 $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4 < k < 4$$

7. 점 $(3,\ 5)$가 평행이동에 의해서 점 $(-4,\ 6)$으로 옮겨질 때, 점 $(0,\ 0)$은 이 평행이동에 의해서 어느 점으로 이동하는가?

① $(-7,\ -1)$ ② $(-7,\ 1)$ ③ $(7,\ -1)$

④ $(7,\ 1)$ ⑤ $(7,\ 7)$

해설

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -7, y축의 방향으로 $+1$만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(0-7,\ 0+1)=(-7,\ 1)$로 이동하게 된다.

8. $y=x^2-2x+3$ 을 평행이동 $f:(x,y)\to(x+2,y-1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y=x^2+2x+4$ ② $y=x^2+2x+2$

③ $y=x^2+2x+3$ ④ $y=x^2-6x+8$

⑤ $y=x^2-6x+10$

해설

$f:(x,y) \quad \rightarrow \quad (x+2,y-1)$ 에서

$x+2=x',y-1=y'$ 라 하자.

$x=x'-2 \quad y=y'+1$ 을 주어진 식에 대입하면,

$y'+1=(x'-2)^2-2(x'-2)+3$

$y'=x'^2-6x'+10$ 에서 $y=x^2-6x+10$

9. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$

(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$

(i), (ii) 로부터 $2b - 1 = 9$ $\quad \therefore b = 5$

10. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+y^2=4$ ② $x^2+y^2=4$

③ $(x-1)^2+y^2=2$ ④ $x^2+(y-4)^2=16$

⑤ $x^2+(y-1)^2=2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0) 이고,
선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점은 $(-1, 0)$,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x-1)^2+y^2=4$

11. 점 $(-4,\ 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점$(-4, 2)$ 를 지나고
x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2(r>0)$
$(-4+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$16-8r+r^2+4-4r+r^2=r^2,\ (r-2)(r-10)=0$
$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi\cdot 10^2=100\pi$

12. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$

교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$

의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로

$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$

$\therefore m=-2$

이 값을 대입하고 정리하면

$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.

$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$

그러므로 $A+B-C=10$

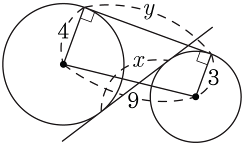
13. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2-8x+y^2+15=0$ 의 공통 외접선의 길이는?

① 21 ② 1 ③ 10 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{15}$

해설

$x^2-8x+y^2+15=(x-4)^2+y^2=1$ 이므로
두 원의 중심간 거리는 4 이고
두 원의 반지름이 각각 $2, 1$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해
두 원의 공통 외접선의 길이는 $\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

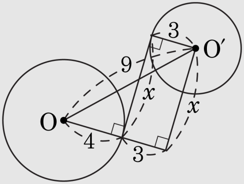
14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.



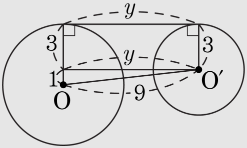
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$9^2=(4+3)^2+x^2 \quad \therefore\ x^2=9^2-7^2$



$9^2=y^2+(4-3)^2 \quad \therefore\ y^2=9^2-1^2$

$\therefore\ x^2+y^2=2\cdot 9^2-7^2-1^2 \ =112$

15. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

16. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

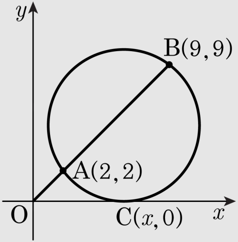
$\angle\mathrm{AOB}=90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

17. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

18. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$ ㉠

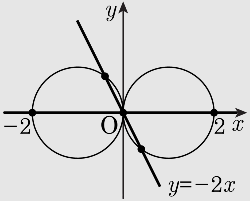
$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0)$, $(\pm 2,\ 0)$,

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

19. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로
각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선
$y = (x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b$ 와
직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
$x^2 - 2(a + 3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$
$\therefore\ b = 2a + 3$
따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a + 3)^2}$
$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$ 이므로

$a = -\frac{6}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

20. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot 2+a\cdot 6+6=0$
$\therefore a=-2$

21. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　② $(1,\ 2)$　③ $(-1,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$　⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 이다.

22. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 $90°$ 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

① πa ② $\sqrt{2}\pi a$ ③ $2\pi a$

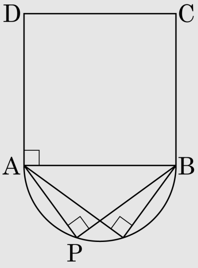
④ $2\sqrt{2}\pi a$ ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 $90°$ 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$$2\times\left(2\pi\frac{a}{2}\right)=4\pi\left(\frac{a}{2}\right)=2\pi a$$



23. 세 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{101}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{105}}{5}$

④ $\dfrac{\sqrt{110}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-4x-4y+4)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 2x+y-6=0 \cdots\cdots$ ㉠

원 C_3 의 방정식을 변형하면

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-25=0$ 이고,

두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은

$(2a-4)x+(2b-4)y-(a^2+b^2-29)=0 \cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$$

$\dfrac{2a-4}{2}=\dfrac{2b-4}{1}$ 에서 $2a-4=4b-8$

$\therefore a=2b-2 \cdots\cdots$ ㉢

$\dfrac{2b-4}{1}=\dfrac{a^2+b^2-29}{6}$ 에 ㉢을 대입하면

$12b-24=(2b-2)^2+b^2-29$

$5b^2-20b-1=0$

$\therefore b=\dfrac{10\pm\sqrt{105}}{5}$

그런데 $b>0$ 이므로 $b=\dfrac{10+\sqrt{105}}{5}$

$\therefore a-b=\dfrac{\sqrt{105}}{5}$

24. 원 $x^2+y^2=5$ 와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$x_1y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\dfrac{25}{2x_1y_1}$ 이므로

x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2+y_1^2=5$ 이고 $x_1>0, y_1>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1,\ x_1y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

25. A(3, −1)에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x-2y-6=0, 2x+y-4=0$

② $x-2y-5=0, 2x+y-5=0$

③ $x-2y-4=0, 2x+y-5=0$

④ $x-2y-3=0, 2x+y-4=0$

⑤ $x-2y-2=0, 2x+y-3=0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)-1$
접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1^2}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2+3m-2=0$$

$$\therefore \quad m=\frac{1}{2}, \ -2$$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}, \quad y=-2x+5$ 이므로

접선의 방정식은 $x-2y-5=0 \ or \ 2x+y-5=0$

26. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2+y^2=4$, $(x-5)^2+y^2=25$

① $y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

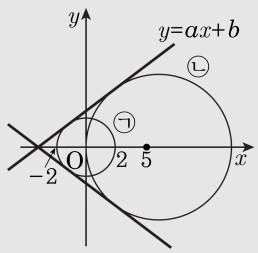
② $y=\pm\frac{4}{5}x\pm 2$ (복부호 동순)

③ $y=\pm\frac{5}{6}x\pm\frac{7}{5}$ (복부호 동순)

④ $y=\pm\frac{9}{10}x\pm\frac{11}{8}$ (복부호 동순)

⑤ $y=\pm\frac{10}{11}x\pm\frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설



$x^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ㉠

$(x-5)^2+y^2=25 \cdots\cdots$ ㉡

공통접선의 방정식을 $y=ax+b \cdots\cdots$ ㉢로 놓으면

원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore |b|=2\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣

또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$$

$\therefore |5a+b|=5\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤

그런데 $b\neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|5a+b|}{|b|}=\frac{5}{2}$$

$2|5a+b|=5|b|, 2(5a+b)=\pm 5b$

$\therefore b=-\frac{10}{7}a$ 또는 $b=\frac{10}{3}a$

(i) $b=-\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=7\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$24a^2+49=0$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b=\frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2=9, a^2=\frac{9}{16}$

$\therefore a=\pm\frac{3}{4}, b=\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii) 로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

27. 두 점 $\mathrm{A}(-3,6)$, $\mathrm{B}(8,-1)$와 직선 $x+y+1=0$이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{A}(-3,6)$ 의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a,b)$라 하면

$\dfrac{a-3}{2}+\dfrac{b+6}{2}+1=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AA}'}\perp l$이므로, $\overline{\mathrm{AA}'}$의 기울기는 1이다.

$\dfrac{b-6}{a+3}=1,\ a-b=-9 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ : $2a=-14,\ a=-7,\ b=2$

$\therefore\ \mathrm{A}'(-7,2)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\le\overline{\mathrm{A'B}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이고,

이 때 점 P는 A′, B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{\mathrm{A'B}}$의 기울기는 $\overline{\mathrm{BP}}$의 기울기와 같다.

$\mathrm{A}'(-7,2)$, $\mathrm{B}(8,-1)$, $\mathrm{P}(m,n)$에서

$\dfrac{-1-2}{8-(-7)}=\dfrac{n+1}{m-8}$,

$m+5n=3 \cdots$ ㉢

점 P는 직선 l위에 있으므로, $m+n=-1 \cdots$ ㉣

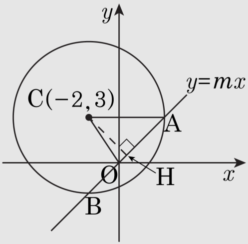
㉢, ㉣에서 $m=-2,\ n=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2,1)$

28. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서

직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$

$= 25 - \overline{CH}^2$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.

$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$

$\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO}$ ($\overline{OH} = 0$) 일 때이므로

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

29. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$

④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기
위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가
반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$

30. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$ ② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$ ④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots ①$$

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m\left(\frac{a+c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b + d = \ m(a+c) \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$a - c = \frac{b+d}{a+c}(d-a)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$