1. 다음은 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$x^2+y^2=1 \cdots$ ㉠ $y=2x+k \cdots$ ㉡ ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면 $5x^2+4kx+k^2-1=0 \cdots$ ㉢ ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면 $D=(4k)^2-4\cdot5\cdot(k^2-1)$ (가)0 k^2(나)5 $\quad\therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k=\pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2>5$
(다): $k^2-5>0 \quad\Rightarrow\quad k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

2. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x+y=3$ ② $2x-y=0$ ③ $x-2y=-3$

④ $2x+y=4$ ⑤ $x+2y=5$

해설

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$1\cdot x+2\cdot y=5$

$\therefore\ x+2y=5$

3. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로

$$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$ ② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$ ④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

5. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

6. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=-x\pm 2$ ② $y=-x\pm 3$ ③ $y=-x\pm 4$

④ $y=-x\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y=-x\pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y=-x\pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore\ y=-x\pm 2\sqrt{2}$

7. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d=\frac{|3\times0+4\times0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|a|}{5}<2=r$$

$$\frac{|a|}{5}<2,\ |a|<10,\ -10<a<10$$

$$a=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \therefore 19\text{개}$$

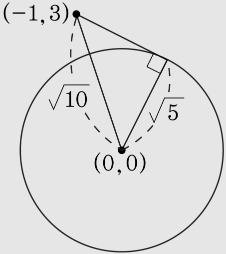
8. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5}=\sqrt{5}$



9. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이2 와 같다.

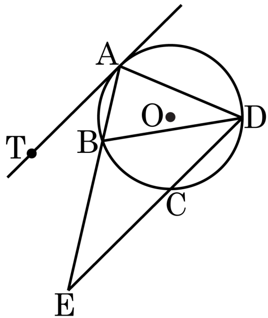
따라서, $\dfrac{|3\cdot1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

10. 네 개의 점 A , B , C , D 가 한 원 O 위에 있고, 직선 AT 는 원 O 의 접선이며, $\overline{\mathrm{CD}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{TA}}$ 이다. 또, 점 E 는 직선 CD 와 AB 가 만나는 점일 때, $\overline{\mathrm{AD}}$ 의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{AB}} = 3, \overline{\mathrm{BE}} = 6$)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

현 AB에 대하여 $\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{BDA}$
또한, $\overline{\mathrm{ED}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{TA}}$ 이므로
$\angle\mathrm{DEA} = \angle\mathrm{EAT}$ 이다.
$\therefore \angle\mathrm{DEA} = \angle\mathrm{BDA}$ ($\because$ 접선과 현이 이루는 각과 원주각은 같다.)
따라서 $\triangle\mathrm{EAD} \backsim \triangle\mathrm{DAB}$(AA닮음) 이므로
$\overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{AB}}$, $9 : x = x : 3$
$\therefore x^2 = 27$ $\therefore x = 3\sqrt{3}$ ($\because x > 0$)

11. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(8,\ 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

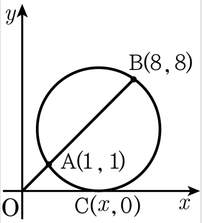
해설

다음 그림에서

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



12. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $5\sqrt{2}-5$　　⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$ 이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

13. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$ ㉠

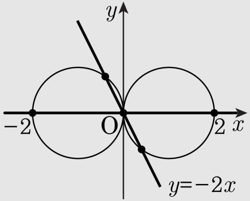
$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

14. $y=x+k$ 가 원 $x^2+y^2+6y-16=0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6　　② 9　　③ −6　　④ −9　　⑤ 4

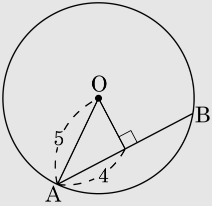
해설

$$\begin{cases} y=x+k \ \cdots ㉠ \\ x^2+(y+3)^2=25 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면

$\overline{AB}=8$, $\overline{OA}=5$ 이므로

점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



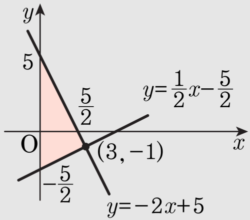
$$\frac{|3+k|}{\sqrt{1+1}}=3, \quad k^2+6k-9=0$$

k 값의 합 $\Rightarrow\ -6$

15. 점 $(3, -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값은?

① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설



접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(3, -1)$에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y+1=m(x-3)$이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $y+1=m(x-3)$,
즉 $mx-y-3m-1=0$에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \ |3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $y=-2x+5$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$$

$\therefore 4S=45$

16. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

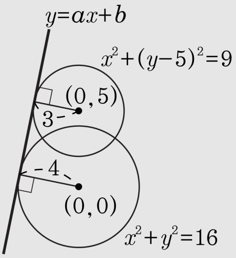
$$x^2 + y^2 = 16,\quad x^2 + (y-5)^2 = 9$$

① $y = \pm\sqrt{6}x + 10$　　② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$　　④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설



$x^2 + y^2 = 16 \cdots\cdots$ ㉠,

$x^2 + (y-5)^2 = 9 \cdots\cdots$ ㉡

공통접선의 방정식을

$y = ax + b \cdots\cdots$ ㉢ 로 놓는다.

이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣

또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$\therefore |b-5| = 3\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤

그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$4|b-5| = 3|b|,\ 4(b-5) = \pm 3b$

$\therefore b = 20$ 또는 $b = \dfrac{20}{7}$

(i) $b = 20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1} = 5$

$\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $b = \dfrac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서

$\sqrt{a^2+1} = \dfrac{5}{7}$ 이고,

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii) 로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로

구하는 공통접선의 방정식은

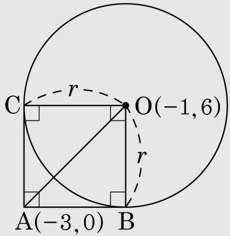
$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

17. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이 O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이 □ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.
이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가 $r\sqrt{2}$가 되어야 하므로



$$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

18. 두 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$, $x^2+(y-6)^2=8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$d=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$

$$=5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ d^2=8$$

19. 방정식 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점 $Q(-2,\ -3)$까지의 거리의 최솟값을 구하면?

① $2(\sqrt{2}-1)$　② $2(\sqrt{3}-1)$　③ $2(\sqrt{5}-1)$

④ $2(\sqrt{6}-1)$　⑤ $2(\sqrt{7}-1)$

해설

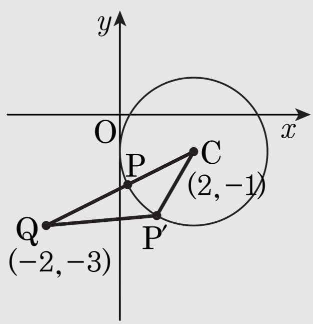
$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 에서

$\{x+(m-1)\}^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3$

반지름의 길이를 r 라고 하면

$r^2=-m^2-2m+3=-(m+1)^2+4$

즉, $m=-1$ 일 때, $r=2$ 로 최대이다.



한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이

$\overline{CQ}$와 원 C의 교점을 P라 하면,

원, C 위의 임의의 점 P′에 대하여

$\overline{CP}=\overline{CP'}=2$이고

$\overline{CQ}=\overline{CP}+\overline{PQ}\le\overline{CP'}+\overline{P'Q}$이므로

$\overline{PQ}\le\overline{P'Q}$

따라서, P가 $\overline{CQ}$와 원 C의 교점일 때,

$\overline{PQ}$의 길이가 최소이다.

중심 $(2,-1)$과 점 $Q(-2,-3)$까지의 거리는

$\sqrt{(2+2)^2+(-1+3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}-2=2(\sqrt{5}-1)$

20. 두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(2,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $3:2$인 점을 P라 할 때, $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

위의 그림과 같이 P 가 P_* 에 있을 때 넓이가 최대가 된다.

$\therefore$ 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 5\times 6 = 15$ 이다.