

1. $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} \right\}$ 의 제 100항은?

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ $\frac{99}{100}$ ④ $\frac{99}{101}$ ⑤ $\frac{101}{100}$

해설

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} \right\} = \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \text{제 100항은 } \frac{99}{100}$$

2. 세 수 -17 , x , 1 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

x 는 -17 과 1 의 등차중항이므로
 $2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore x = -8$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6 의 값은?

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$ (복호·동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로
 $(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$ 에서

$$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. 첫째항이 -43, 공차가 7인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8항

② 제 9항

③ 제 10항

④ 제 11항

⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$7n - 50 > 0, 7n > 50$$

$$\therefore n > \frac{50}{7} = 7.14\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

5. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

6. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

① n

② $3n - 2$

③ $2n + 1$

④ n^2

⑤ $(n + 1)^2$

해설

$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \dots$
 $\therefore a_n = n^2$

7. 공비가 $-\sqrt{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -30$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$ 의 값은?

- ① -120 ② -135 ③ -150 ④ -165 ⑤ -180

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $-\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = -30$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7$$

$$= r^4(a + ar + ar^2 + ar^3)$$

$$= 4 \times (-30) = -120$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = -30 + (-120) = -150$$

8. 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n + p\}$ 가 등비수열을 이루도록 하는 상수 p 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}, S_n + p = \frac{3^n - 1 + 2p}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{2p-1}{2}$$

그런데 $S_n + p$ 가 등비수열을 이루므로

$$\frac{2p-1}{2} = 0 \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

9. 첫째항이 2009 이고 공차 d 가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_{402} \times S_{403} < 0$ 일 때, $a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 201

해설

$$S_{402} \times S_{403} < 0 \text{에서 } S_{402} > 0, S_{403} < 0$$

$$S_{402} = \frac{402}{2}(2 \times 2009 + 401d) > 0$$

$$\therefore d > -10. \dots$$

$$S_{403} = \frac{403}{2}(2 \times 2009 + 402d) < 0$$

$$\therefore d < -9. \dots$$

d 는 정수이므로 $d = -10$ 이다.

$$\text{따라서 } a_n = 2009 + (n-1) \times (-10)$$

$a_n < 0$ 인 최초의 n 을 구하면

$$a_n = 2009 + (n-1) \times (-10) < 0$$

$$\therefore n > 201.9$$

따라서 $n \leq 201$ 이면 $a_n > 0$, $n \geq 202$ 이면 $a_n < 0$ 이므로

$a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값은 201이다.

10. $a_1 = 8$, $a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a_4 = 8 \times r^3 = 1 \text{ 에서 } r^3 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ 이므로 } a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\therefore b_n = \log_2 \left\{ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \right\}^2 = 2 \log_2 2^{-2n+4}$$

$$= 2(-2n+4) = -4n+8$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$$\therefore c - d = 8$$