1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^2 = -1$

② $x^2 = -4$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-9} = 3i$

④ 2는 복소수이다.

⑤ $a + bi$ 에서 $b = 0$ 이면 실수이다. (단, a, b 는 실수)

해설

④ $2 = 2 + 0 \cdot i$ 이므로 복소수이다.

2. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 에서 $4x+4yi=8-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x=8$, $4y=-2$

$\therefore\ x=2,\ y=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ xy=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

3. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$ ② $-1+i$ ③ $2i$

④ $2+i$ ⑤ 2

해설

$$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$$
$$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$$
$$=-1+i$$

4. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i$$
$$= -4x + (x^2-4)i$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

5. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

6. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$ ② $-1-2i$ ③ $-1+2i$

④ $-1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}\\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i}\\ &= \frac{2+4i}{1-i}\\ &= -1+3i\end{aligned}$$

7. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5 ② 7 ③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12 ⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

8. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

ㄴ $z + \bar{z}$는 실수이다.

ㄷ $z - \bar{z}$는 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

ㄱ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

ㄴ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

ㄷ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

9. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2　　② -1　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1 \\
&= (a+b+1) - (a-b)i \\
&= a - bi
\end{aligned}
$$
에서

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

10. 두 복소수 $z_1 = a + (3b-1)i$, $z_2 = (b+1) - 5i$에 대하여 $z_1 = \bar{z_2}$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + (3b-1)i = (b+1) + 5i$에서

$\begin{cases} a = b+1 \\ 3b-1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ a+b = 5$

11. $x=-2-i$ 일 때, $x^2+4x+10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x=-2-i$ 에서 $x+2=-i$ 의 양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(-i)^2$ 이므로

$x^2+4x=-5$

$\therefore\ x^2+4x+10=-5+10=5$

12. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅳ　　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

13. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \quad \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

14. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

15. 두 복소수 $\alpha = a-2i$, $\beta = 5+bi$에 대하여 $\alpha+\overline{\beta} = \overline{3-2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a+b=-6$

해설

$\alpha+\overline{\beta} = \overline{3-2i}$

$(a-2i)+(5-bi) = 3+2i$

$(a+5)-(2+b)i = 3+2i$

$\therefore\ a=-2, b=-4$

$\therefore\ a+b=-6$