1. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b = 1$ 이면 $a + (b-1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i,\ b = 1$ 이면 $a + (b-1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

2. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x^2 = (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i$
$y^2 = (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i$
$\therefore\ x^2 + y^2 = -2$

해설

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$

3. $x=3+2i$ 일 때, $x^2-6x-10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x=3+2i$ 에서 $x-3=2i$ 의 양변을 제곱하면
$(x-3)^2=(2i)^2$ $\therefore$ $x^2-6x=-13$
$x^2-6x-10=-13-10=-23$
$\therefore$ -23

4. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$
$3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,
$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로
$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

5. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$　② $-1-2i$　③ $-1+2i$
④ $-1-i$　⑤ $-1+i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i \end{aligned}$$

6. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$

$= \dfrac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \dfrac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

7. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16} = -4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

8. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

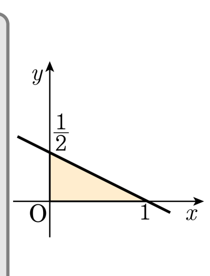
(준식) $= (2x-2y)+(x+2y-1)i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



9. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면
$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$
이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$
$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$
$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

10. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 1, 3)$ 3개

11. $i^2=-1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(n+i)^4=\{(n+i)^2\}^2=(n^2-1+2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2-1+2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n=0$ 일 때 성립
ii) $n^2-1=0$, $n=\pm 1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

해설

$(n+i)^4=n^4-6n^2+1+i(4n^3-4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3-4n=0$, $n=0$, ± 1
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

12. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

13. $a=1+i$, $b=1-i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2=(1+i)^2=2i,\ b^2=(1-i)^2=-2i$,

$ab=(1+i)(1-i)=2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2&=\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}\\&=\frac{-2i+2+2i}{4}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

14. $z = 1 + i$ 일 때, $\dfrac{z\overline{z}}{z - \overline{z}}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1 + i$ ② $1 - i$ ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$z = 1 + i$ 이면 $\overline{z} = 1 - i$ 이다.

$$\therefore \quad \frac{z\overline{z}}{z - \overline{z}} = \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)-(1-i)} = \frac{2}{2i} = \ -i$$

15. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore \ a = -2, b = -4$

$\therefore \ a + b = -6$

16. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$

$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$

17. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

18. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

② $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이면 $\alpha=r,\ \beta=\delta$

③ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

⑤ $\alpha^2<0$

해설

① $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

② $\alpha=1,\ \beta=1$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i$ 이고, $r=2,\ \delta=-1+i$ 이면 $r+\delta i=1+i$ 에서 $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이지만 $\alpha\neq r,\ \beta\neq\delta$ 이다.

③ $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

④ $\alpha\neq 0$ 이고 $\beta\neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta=0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta=0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

⑤ $(\text{순허수})^2<0$ 이나 $\alpha=1+i$ 이면 $\alpha^2=(1+i)^2=2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

19. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b　② $2b$　③ 0　④ $5a$　⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5$,　$\bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

20. $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, x^4-3x^3+3x-2 의 값은?

① $2+\sqrt{3}i$ ② $2-\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $-3+\sqrt{3}i$ ⑤ $3-\sqrt{3}i$

해설

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $2x=1+\sqrt{3}i$, $2x-1=\sqrt{3}i$
$4x^2-4x+1=-3$
$4x^2-4x+4=0$
$x^2-x+1=0$
x^4-3x^3+3x-2 를 x^2-x+1 로 나누면
x^4-3x^3+3x-2
$=(x^2-x+1)(x^2-2x-3)+2x+1$
$=0+2x+1$
$=2\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$
$=2+\sqrt{3}i$

21. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$　　② $-2x+1$　　③ 3

④ -3　　⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \ \ b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

22. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$ ② $-1+i$ ③ $2i$
④ $2+i$ ⑤ 2

해설

$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$
$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$
$=-1+i$

23. 방정식 $ax^2+ibx+c=0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\overline{z}$는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2+ibz+c=0,\ \overline{az^2+ibz+c}=0$
$a\overline{(z^2)}-ib\overline{z}+c=0,$
$a(-\overline{z})^2+ib(-\overline{z})+c=0$이므로
$-\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

24. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

ㄱ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다.

ㄴ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

ㄷ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$

ㄴ (생략)

ㄷ $\alpha=x+yi$ 라 하면

$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$($x, y$는실수)

$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$

즉, $\alpha=0$

25. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 하면

$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$

$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots$ ㉠

$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots$ ㉠

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면

$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) + \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \sqrt{3}$