

1. 다음 중에서 집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① 키가 작은 학생들의 모임

② 10 에 가까운 수의 모임

③ 우리 반에서 배우는 교과목의 모임

④ 영어를 잘하는 학생들의 모임

⑤ 1 보다 작은 자연수의 모임

해설

③, ⑤는 기준이 명확하므로 집합이다.

2. 다음 중 유한집합인 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x \text{는 자연수}\}$

㉡ $\{x \mid x \text{는 가장 작은 자연수}\}$

㉢ $\{x \mid 0 < x < 1, x \text{는 자연수}\}$

㉤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$

㉥ $\{x \mid x \text{는 1보다 작은 수}\}$

㉦ $\{x \mid x \text{는 100보다 작은 2의 배수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉢

▶ 정답 : ㉤

▶ 정답 : ㉦

해설

㉠ $\{1, 2, 3, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.

㉡ 가장 작은 자연수는 1이므로 유한집합이다.

㉢ 0과 1 사이에 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한 집합이다.

㉤ 유한집합

㉥ 1보다 작은 수는 $0, -1, -\frac{1}{2}, \dots$ 등 무수히 많이 존재하므로 무한집합이다.

㉦ $\{2, 4, 6, 8, \dots, 96, 98\}$ 이므로 유한집합이다.

3. 두 집합 $A = \{x, y, \{x, y, \emptyset\}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$A = \{x, y, \{x, y, \emptyset\}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\} \text{ 에서}$$

$$n(A) = 3 \text{ 이고, } n(B) = 3 \text{ 이므로}$$

$$n(A) - n(B) = 0 \text{ 이다.}$$

4. 두 집합 $A = \{x - 2 \mid -4 < x \leq 3\}$, $B = \{x + a \mid -1 \leq x < 7\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 가 되게 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a < -3$

② $-4 < a \leq -3$

③ $-6 \leq a < -5$

④ $-6 < a \leq -5$

⑤ $-7 \leq a \leq -5$

해설

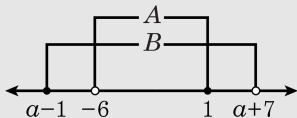
$-4 < x \leq 3$ 에서 $-6 < x - 2 \leq 1$

$$\therefore A = \{x \mid -6 < x \leq 1\}$$

$-1 \leq x < 7$ 에서 $a - 1 \leq x + a \leq 7 + a$

$$\therefore B = \{x \mid a - 1 \leq x \leq 7 + a\}$$

이때, $A \subset B$ 를 만족하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, } a - 1 \leq -6, 7 + a > 1$$

$$\therefore -6 < a \leq -5$$

5. 집합 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 중 d 또는 f 를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 4개

② 8개

③ 16개

④ 32개

⑤ 48개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수에서 집합 $\{a, b, c, e\}$ 의 부분집합의 개수를 제외하면 되므로 $2^6 - 2^4 = 64 - 16 = 48(\text{개})$

6. $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{2, 5, 7\}, A \cap B = \{6, 8\}, A^c \cap B^c = \{1, 3, 4\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{6, 8\}$

② $\{6, 9\}$

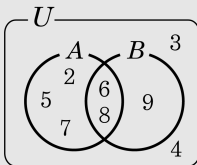
③ $\{6, 7, 8\}$

④ $\{6, 8, 9\}$

⑤ $\{6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c = \{1, 3, 4\}$ 이므로



따라서 $B = \{6, 8, 9\}$ 이다.

7. 명제 ‘ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.’는 거짓이다.
다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$

② $x = 12$

③ $x = 10$

④ $x = 8$

⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다.
즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

8. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

9. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a = 1, b = -1$

② $a = 1, b = 1$

③ $a = 2, b = -1$

④ $a = 2, b = 0$

⑤ $a = -1, b = 2$

해설

f 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y = ax + b$ 가

점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

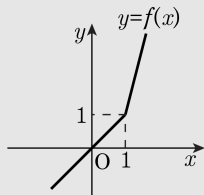
또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선

$y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



11. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4

② 3

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

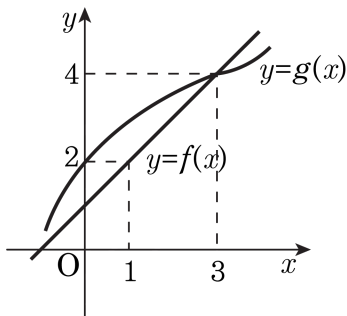
f^{-1} 이므로 $f \circ f = I$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$$

$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

12. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) &= g^{-1}(f(1)) + 4 \\ &= g^{-1}(2) + 4\end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$

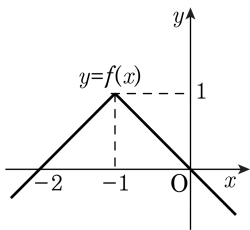
문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가

$(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$

이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$

$$\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$$

13. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x - 1| - 1$

② $y = |x + 1| - 1$

③ $y = |x - 1| + 1$

④ $y = -|x + 1| + 1$

⑤ $y = -|x + 1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$y = -|x|$ 에 x 대신 $x + 1$,

y 대신 $y - 1$ 을 대입하면 $y - 1 = -|x + 1|$

즉, $f(x) = -|x + 1| + 1$ 이므로 $y = -|x + 1| + 1$

14. $x : y : z = 3 : 4 : 5$ 일 때, $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{50}{47}$

② $\frac{47}{50}$

③ $\frac{49}{50}$

④ $\frac{24}{25}$

⑤ $\frac{26}{25}$

해설

$$x : y : z = 3 : 4 : 5 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0)$$

$$\therefore x = 3k, y = 4k, z = 5k$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \frac{3k \cdot 4k + 4k \cdot 5k + 5k \cdot 3k}{(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2} \\ &= \frac{47k^2}{50k^2} = \frac{47}{50}\end{aligned}$$

15. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b=4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

16. n 이 자연수이고 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x = 2 \times n\}$, $B = \{x \mid x = 2 \times n + 1\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \notin B$

② $4 \in A$

③ $7 \notin A$

④ $8 \notin A$

⑤ $7 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 $2, 4, 6, \dots$ 이고 집합 B 의 원소는 $3, 5, 7, \dots$ 이므로 $8 \in A$ 이다.

17. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 일 때, $B \subset A$, $n(B) = 3$ 을 만족하는 집합 B 의 개수는?

① 2개

② 4개

③ 8개

④ 12개

⑤ 16개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 집합 B 가 될 수 있는 것은
 $\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 5, 7\}$

18. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{a, b, e\}$ 이고, $A \cap B = \{b, e\}$, $A \cup B = \{a, b, d, e, h\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{a, d, e, h\}$

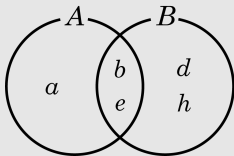
② $\{b, d, e, h\}$

③ $\{b, e, h\}$

④ $\{d, e, h\}$

⑤ $\{d, e\}$

해설



$\therefore B = \{b, d, e, h\}$

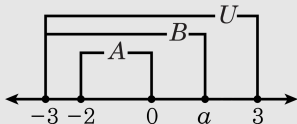
19. $U = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq a\}$ 라고 할 때, $B^c \subset A^c$ 가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$B^c \subset A^c \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로 위의 그림에서 $0 \leq a \leq 3 \therefore a$ 의 최댓값은 3이다.



20. $a > 0, b > 0, a + b = 4$ 일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로

$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}, 0 \leq ab \leq 4$

따라서 ab 의 최댓값은 4

21. x, y 는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ 이 성립하므로 } y < 0, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2} \\ &= |y-x| + x-y - 2|y| \\ &= -y + x + x - y + 2y = 2x \end{aligned}$$

22. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2. \times \times \dots$$

$$\therefore x = 2, y = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$(x + 2y)^2 = \{2 + 2(\sqrt{3} - 1)\}^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

23. $a^2 = 2 + \sqrt{3}$, $b^2 = 2 - \sqrt{3}$ 인 양수 a, b 에 대하여 $a^3 + b^3$ 의 값은?

① $2\sqrt{6}$

② $3\sqrt{3}$

③ $3\sqrt{6}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $4\sqrt{6}$

해설

$$a^2 b^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$\therefore ab = 1 (\because ab > 0)$$

$$a^2 + b^2 = 4$$

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 6$$

$$\therefore a + b = \sqrt{6} (\because a > 0, b > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

24. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 의

최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다.

이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서

$$(x+2)(x-3) \geq 0$$

$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

$$y = \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x-2)+4}{x-2}$$

$$= \frac{4}{x-2} + 1$$

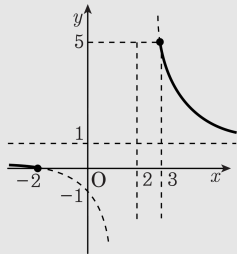
즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서

$y = \frac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과

같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,

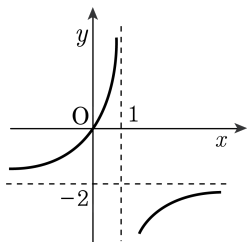
$x = 3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

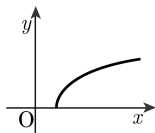


25.

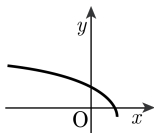
함수 $y = \frac{bx+c}{ax-1}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형은?



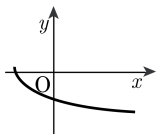
①



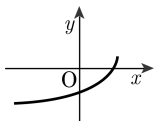
②



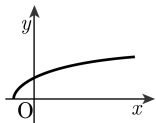
③



④



⑤



해설

점근선이 $x=1$, $y=-2$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-1} - 2 \cdots \textcircled{7}$$

⑦이 원점을 지나므로 $(0, 0)$ 을 대입하면,

$$\therefore k = -2$$

$$y = \frac{-2}{x-1} - 2 = \frac{-2x}{x-1}$$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=0$

$$\therefore y = \sqrt{ax+b}+c = \sqrt{x-2}$$

따라서 개형은 ①이다.