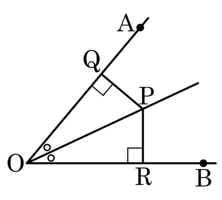
1. 다음 그림과 같이 $\angle AOB$ 의 내부의 한 점 P 에서 두변 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 에 내린 수선의 발을 각각 Q , R 이라 한다. $\angle QOP = \angle ROP$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.



보기

㉠ $\angle OQP = \angle ORP$	㉡ $\angle AOP = \angle BOP$
㉢ $\overline{QP} = \overline{RP}$	㉣ $\overline{OR} = \overline{PR}$
㉤ $\overline{OQ} = \overline{OP}$	

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

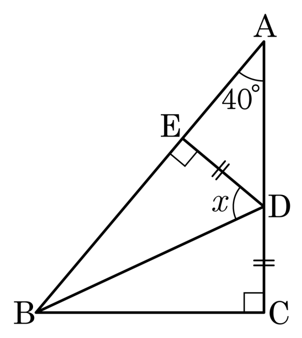
▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

$\overline{OP}$ 가 $\angle QOR$ 을 이등분하므로, $\triangle QOP \equiv \triangle ROP$ 이다.
$\overline{OR} = \overline{PR}$, $\overline{OQ} = \overline{OP}$ 는 잘못 되었다.

2. $\triangle$ABC 에서 $\angle C = \angle E = 90°$, $\angle A = 40°$, $\overline{CD} = \overline{ED}$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?

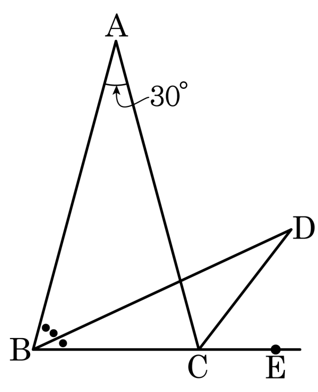


① 45°　② 50°　③ 65°　④ 70°　⑤ 75°

해설

$\triangle BDE \equiv \triangle BDC$(RHS합동) 이므로,
$\angle EBD = \angle CBD = 25°$, $\triangle BDE$ 에서 $\angle x = 65°$

3. 이등변삼각형 ABC 에서 $\angle B$ 의 삼등분선과 $\angle C$ 의 외각의 이등분선의 교점을 D 라 할 때, $\angle BDC$ 의 크기는?

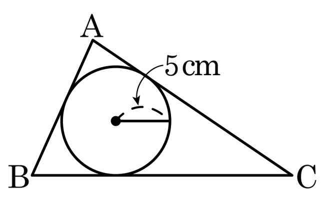


① $25°$ ② $27.5°$ ③ $30°$ ④ $32.5°$ ⑤ $35°$

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle B = \angle C = (180° - 30°) \div 2 = 75°$ 이므로 $\angle DBC = 75° \div 3 = 25°$
그리고 $\angle ACE = 180° - 75° = 105°$, $\angle ACD = 105° \div 2 = 52.5°$
따라서 $\angle BDC = 180° - (25° + 75° + 52.5°) = 27.5°$

4. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 내접원의 반지름의 길이는 $5\,cm$ 이다. $\triangle ABC = 120\,cm^2$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 세 변의 길이의 합을 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 48 cm

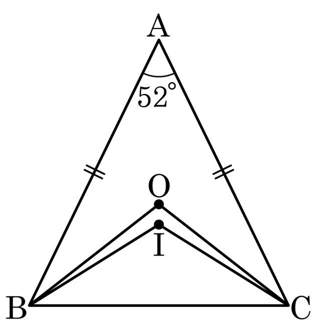
해설

세 변의 길이를 각각 a, b, c 라 두면

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times (a + b + c)$

$\therefore a + b + c = 120 \times \frac{2}{5} = 48(\,cm)$

5. 다음 그림과 같이 이등변삼각형 ABC 의 외심, 내심을 각각 O , I 라 할 때, $\angle OBI = (\quad)°$ 이다. 빈 칸을 채워 넣어라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A = 52°$

$\therefore \angle BOC = 104°$

$\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로

$\angle OBC = (180° - 104°) \div 2 = 76° \div 2 = 38°$

$\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때,

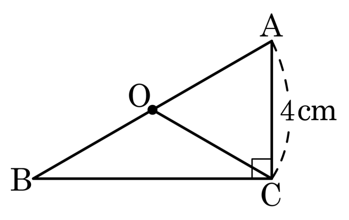
$\frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle BIC$

$\therefore \angle BIC = 116°$

$\angle IBC$ 는 $\angle ABC$ 의 이등분이므로 $\frac{1}{2} \times 64° = 32°$

따라서 $\angle OBI = \angle OBC - \angle IBC = 38° - 32° = 6°$ 이다.

6. 다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC 의 외심이 점 O 일 때, $\overline{AB}+\overline{AC}=$ 12cm 이면 $\angle$ABC 의 크기는?

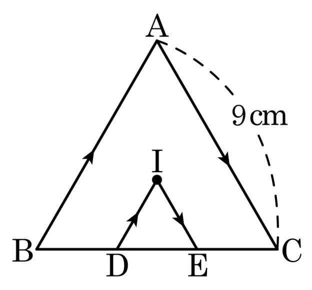


① $10°$ ② $20°$ ③ $30°$
④ $40°$ ⑤ 알 수 없다.

해설

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AC}=12\text{cm}$ 이고
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 이므로 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AC}=4\text{cm}$ 이다.
따라서 $\triangle$AOC 는 정삼각형이므로 $\angle OAC=60°$
$\therefore\ \angle ABC=30°$

7. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이고, 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. 점 I 를 지나면서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 평행한 직선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 각각 D , E 라 할 때, $\overline{DE} = (\quad)$cm 이다. 빈 칸에 알맞은 수를 써 넣어라.



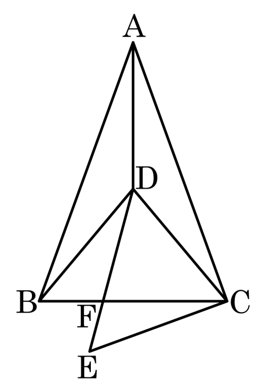
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\angle ABI = \angle IBD$ 이고 $\angle ABI = \angle BID (\because \overline{AB} // \overline{ID})$ 이므로 $\angle IBD = \angle BID$ 이다.
$\Rightarrow \overline{BD} = \overline{ID}$ 이다.
같은 방법으로 $\angle ACI = \angle ICE$ 이고 $\angle ACI = \angle CIE$ $(\because \overline{AC} // \overline{IE})$ 이므로 $\angle ICE = \angle CIE$ 이다.$\Rightarrow \overline{IE} = \overline{EC}$
따라서 ($\triangle IDE$ 의 둘레의 길이)$= \overline{ID} + \overline{DE} + \overline{IE} = \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC} = \overline{BC} = 9$(cm) 이고,
$\triangle IDE$ 는 정삼각형이므로 $\overline{DE} = \frac{9}{3}$cm $= 3$cm 이다.

8. 다음 그림에서 삼각형 ABC 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고 삼각형 CDE 는 $\overline{CD} = \overline{CE}$ 인 이등변삼각형이다. $\angle ABC = 70°$, $\angle DCA = \angle FCE$, $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ 일 때, $\angle CDE$ 를 구하여라.



▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 55 °

해설

$\angle DBC = \angle DCB = \angle a$ 라 하면

$\angle DBA = \angle DCA = 70° - \angle a$

$\angle A = 180° - (70° + 70°) = 40° = \angle DAB + \angle DAC$

$70° - \angle a + 70° - \angle a = 40°$

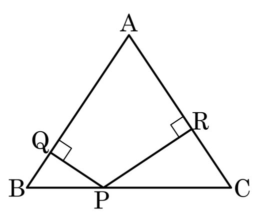
$\therefore\ \angle a = 50°$, $\angle DCA = 70° - 50° = 20°$

$\angle CDE = \angle x$ 라 하면

$2\angle x + 50° + 20° = 180°$

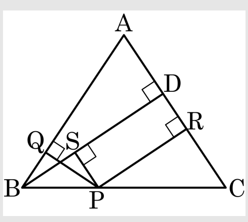
$\therefore\ \angle x = 55°$ $\therefore$ $\angle CDE = 55°$

9. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 $\triangle ABC$ 에서 밑변 BC 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 한다. $\overline{PQ} = 3\text{cm}$, $\overline{PR} = 5\text{cm}$ 일 때, 점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 이르는 거리는?



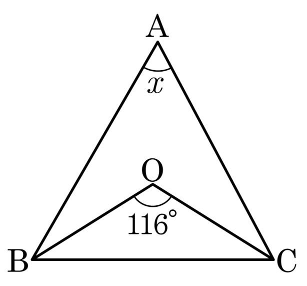
① 5cm ② 7cm ③ 8cm ④ 10cm ⑤ 12cm

해설



B 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 D
P 에서 $\overline{BD}$ 에 내린 수선의 발을 S 라 하면
$\angle BQP = \angle BSP \cdots$ ㉠
$\overline{BP}$ 는 공통이다. $\cdots$ ㉡
$\angle BPS = \angle C$
$\therefore \angle QBP = \angle SPB \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢ 에 의하여
$\triangle QBP \equiv \triangle SPB$ (RHA 합동)
$\therefore \overline{QP} = \overline{SB} \cdots$ ㉣
또, □SPRD 는 직사각형이므로
$\overline{PR} = \overline{SD} \cdots$ ㉤
㉣, ㉤ 에서 $\overline{QP} + \overline{PR} = \overline{BS} + \overline{SD} = \overline{BD}$
$\therefore \overline{BD} = 3 + 5 = 8(\text{cm})$

10. 삼각형 ABC 의 외심이 점 O 일 때, $\angle BOC = 116\,°$ 이다. $\angle x$ 의 크기를 구하면?



① $46\,°$ ② $50\,°$ ③ $58\,°$ ④ $64\,°$ ⑤ $116\,°$

해설
$\angle BOC = 2 \times \angle BAC$ 이므로 $\angle BAC \times 2 = 116°$
$\therefore \angle x = \angle BAC = 58\,°$

11. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡　　② ㉢,㉣　　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

12. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 정리하면
$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2-1=0$, $x=\pm1$
한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로
$z\neq0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x=-1$

13. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a\neq 2$, $\therefore\ a=-4$

14. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

15. $(1+i)^6-(1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 16 ② -16 ③ $16i$ ④ $-16i$ ⑤ 0

해설

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$,
$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\therefore\ (1+i)^6-(1-i)^6$
$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$
$=(2i)^3-(-2i)^3$
$=8i^3+8i^3$
$=16i^3=-16i$

16. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ 을 간단히 하면?

① 0 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ $-2i$ ⑤ $2i$

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{i}=-i$

$\therefore$ (준식) $=(i)^7+(-i)^8=-i+1$

17. $\alpha = 1+i,\ \beta = 1-i$ 일 때, $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta = 2,\ \alpha\beta = 2$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8-12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

18. α,β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠ ② ㉠ ,㉡ ③ ㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉢ ⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$

㉠ $\alpha+\beta = (a+bi)+(a-bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2+b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

19. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$
\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\
&= (1 + i)(1 - i) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

20. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$는 $x+yi$의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$

$(\overline{x+yi})=\dfrac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$

$x+yi=1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

21. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^7 + x^4 + 2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x^3 = x \cdot x^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{-1+3i^2}{4} = -1$$

$$\therefore\ x^7 + x^4 + 2 = (x^3)^2 \cdot x + x^3 \cdot x + 2 = x - x + 2 = 2$$

22. 0 이 아닌 실수 a 가 등식 $\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+5}{a}}$ 를 만족할 때, $|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2a-5$　　② 5　　③ $2a+5$

④ -5　　⑤ $2a$

해설

$a+5 \geq 0,\ a<0$, $-5 \leq a < 0$

$|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2} = -(a) + (a+5) = 5$

23. $a-b<0$ 이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-|a+b|$ 를 간단히 하면?

① b　② $2b$　③ $a-2b$

④ $2a+b$　⑤ 0

해설

$a-b<0$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0,\ b<0$

따라서 $a-b<0,\ a+b<0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2}-|a-b| &= |a-b|-|a+b| \\ &= -(a-b)+(a+b) \\ &= -a+b+a+b=2b\end{aligned}$$