

1. 수열 1, -3, 5, -7, 9, ... 의 100번째 항은?

- ① -199 ② -99 ③ -59 ④ 99 ⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는
꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$$

2. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

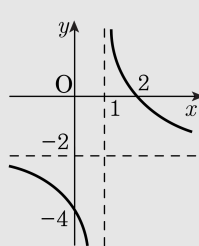
$a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

3. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② 치역은 $\mathbb{R} - \{-2\}$ 이다.
- ③ 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ④ 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이다.
- ⑤ 정의역은 $\mathbb{R} - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.



4. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=1, y=-2$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-b} \Rightarrow y = a + \frac{ab+1}{x-b}$$

점근선이 $x=1, y=-2$ 이므로, $a=-2, b=1$

$$\therefore ab = -2$$

5. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{-x-1}{x-1}$

㉡ $y = \frac{x}{x-1}$

㉢ $y = \frac{-2x-1}{x+1}$

① ㉡

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α 만큼,

y 축으로 β 만큼 평행이동시키면

$y = \frac{1}{x-\alpha} + \beta$ 꼴이 된다.

㉠ $y = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{-(x-1)-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1} - 1$

㉡ $y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$

㉢ $y = \frac{-2x-1}{x+1} = \frac{-2(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 2$

따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

6. 분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)
- ① $\{y \mid y < 0 \text{ 또는 } y > 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$ ④ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } 1 < y \leq 2\}$
 ⑤ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } y \geq 2\}$

해설

분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \frac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나

므로

$$2 = \frac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$$

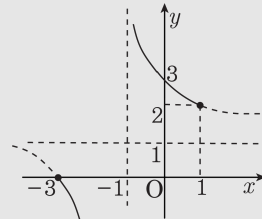
$$\therefore y = \frac{x+3}{x+1}$$

따라서 $-3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{ 의 그래프는}$$

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$$\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$$



7. 함수 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p + q + r$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = \frac{-5}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이고,
점 $(-4, 2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y = x + 6$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore p = -4, \quad q = 2, \quad r = 6$$

$$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$$

8. 함수 $y = \frac{ax+b}{2x+c}$ 가 점 (1,2) 를 지나고 점근선이 $x = 2, y = 1$ 일 때,
 $a + b + c$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{k}{x-2} + 1$$

또 점 (1,2)를 지나므로

$$2 = \frac{k}{1-2} + 1 \quad \therefore k = -1$$

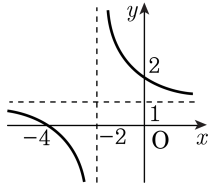
$$\therefore y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{-1}{x-2} + 1 = \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{2x-4}$$

$$\therefore a = 2, b = -6, c = -4$$

$$\therefore a + b + c = -8$$

9. 함수 $y = \frac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -1
- ② -2
- ③ -4
- ④ -7
- ⑤ 0



해설

점근선이 $x = -2$, $y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(0, 2)$ 를 지나므로 대입하면 $k = 2$

$$y = \frac{2}{x+2} + 1 = \frac{-x-4}{-x-2}$$

$$\therefore a = -1, b = -2, c = -4$$

10. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가 점 $(2,7)$ 을 지나고 이 함수의 역함수가 $y = \frac{x+c}{x-3}$ 일 때, a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

① -27 ② -9 ③ -3 ④ 3 ⑤ 9

해설

점 $(2,7)$ 을 지나면 역함수는 $(7,2)$ 를 지난다.

$$2 = \frac{7+c}{7-3} \text{ 에서 } c = 1$$

이제 원래 함수를 구해보면 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 에서

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{x-1} \dots\dots \text{역함수}$$

$$\therefore a = 1, b = 3, c = 1$$

$$\therefore abc = 3$$

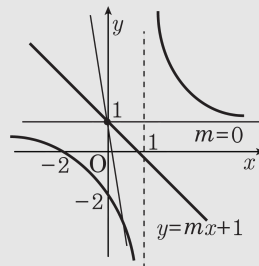
11. 분수함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < m \leq 12$ ② $-12 \leq m < 0$ ③ $-12 < m \leq 0$
 ④ $0 \leq m < 12$ ⑤ $-12 \leq m \leq 12$

해설

$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로 함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

- (i) 그림에서 $m = 0$ 일 때
 두 그래프는 만나지 않는다.



- (ii) $y = \frac{x+2}{x-1}$ 와 $y = mx + 1$ 에서

$$\frac{x+2}{x-1} = mx + 1$$

$$\text{즉, } mx^2 - mx - 3 = 0$$

이때, 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 + 12m < 0, \quad m(m+12) < 0$$

$$\therefore -12 < m < 0$$

- (i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는
 $-12 < m \leq 0$

12. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

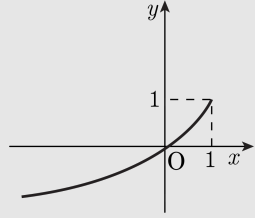
보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 그래프는 제2사분면을 지난다.
- ㉡ $a > 0$ 이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.
- ㉤ $y = \sqrt{x} + 1$ 의 그래프와 만날 수 있다.

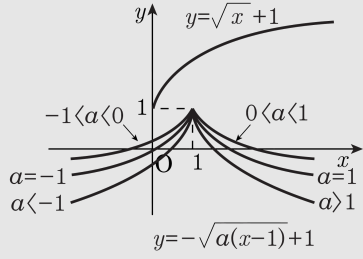
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉤ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉤

해설

㉠ $a = -1$ 이면 주어진 무리함수는
 $y = -\sqrt{-(x-1)} + 1$
 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$ 일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \geq 0$ 이므로 치역은 $\{y|y \leq 1\}$
㉤ $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$ 의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x} + 1$ 의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



13. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

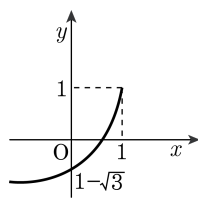
또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$

14. 무리함수 $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

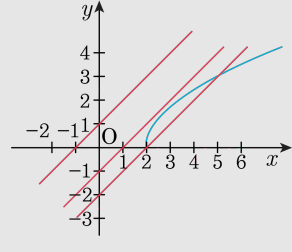
주어진 그림은 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 1, y 축 방향으로 1만큼 평행이동한
 것이므로 $y-1 = -\sqrt{a(x-1)}$
 즉 $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$
 그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$ 을 지나므로
 $1-\sqrt{3} = -\sqrt{-a}+1$,
 $\therefore a = -3$
 $\therefore y = -\sqrt{-3(x-1)}+1$
 $\therefore a+b+c = (-3)+3+1 = 1$

15. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$ 과 직선 $y = x+k$ 가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

- ① $k = -2$ 또는 $k > 1$ ② $k = -1$ 또는 $k < -2$
 ③ $k = 1$ 또는 $k > 2$ ④ $k = 2$ 또는 $k < -1$
 ⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는 접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$ 에서

$$4x-8 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 + 8) = -4k - 4 = 0 \text{에서 } k = -1$$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

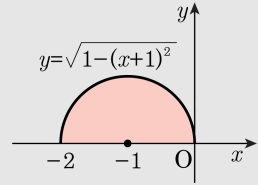
16. $y = \sqrt{1 - (x + 1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1 - (x + 1)^2}$ 에서
 $1 - (x + 1)^2 \geq 0$, $x^2 + 2x \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 0$
따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y | y \geq 0\}$
 $y = \sqrt{1 - (x + 1)^2}$ 의 양변을
제곱하여 정리하면 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 이므로
함수의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$



17. 집합 {2, 4, 6, 8, 10, 12}에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow$ 등차수열

- ① 공차가 2인 경우 (4가지)
2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12
② 공차가 4인 경우 (2가지)
2, 6, 10 4, 8, 12

18. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열
 $1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$
 $1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$
 이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{20} - b_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{209}{189}$ ② $\frac{11}{189}$ ③ $\frac{209}{11}$ ④ $\frac{198}{209}$ ⑤ 1

해설

1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면

$$1 + 11p = 10 \Rightarrow p = \frac{9}{11}$$

1, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$ 의 공차를 q 라 하면

$$1 + 21q = 10 \Rightarrow q = \frac{9}{21}$$

$$\therefore \frac{a_{10} - a_1}{b_{20} - b_1} = \frac{9p}{19q} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{19 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{189}{209}$$

19. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_7 = 60$ 일 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 의 값은?

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 a_2, a_6, a_{10} 과 a_5, a_6, a_7 은 모두 등차수열을 이룬다.

따라서 a_6 은 a_2 와 a_{10} , a_4 와 a_8 , a_5 와 a_7 의 등차중항이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$= (a_2 + a_{10}) + (a_4 + a_8) + a_6$$

$$= 2a_6 + 2a_6 + a_6 = 5a_6$$

$$= 5 \cdot \frac{a_5 + a_7}{2} = 5 \cdot \frac{60}{2} (\because a_5 + a_7 = 60)$$

$$= 150$$

20. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 와 b^2, c^2, a^2 이 각각 이
순서대로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은? (단, $0 < a < 10$)

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

a, b, c 가 등차수열을 이루므로 $2b = a + c \cdots \textcircled{A}$
 b^2, c^2, a^2 이 등차수열을 이루므로 $2c^2 = b^2 + a^2 \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면
$$2c^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + a^2$$
$$7c^2 - 2ac - 5a^2 = 0 \quad (7c + 5a)(c - a) = 0$$
$$\therefore c = -\frac{5}{7}a (\because c \neq a)$$
 a 가 7의 배수이고, $0 < a < 10$ 이므로
 $a = 7, c = -5, b = 1$
 $\therefore a + b + c = 7 + 1 + (-5) = 3$

21. 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 20$ 일 때, $a_2 + a_8$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 을 차례로 $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 로 놓으면

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 5a = 20$$

$$\therefore a = 4$$

이때, $a_2 = a - 3d, a_8 = a + 3d$ 이므로

$$a_2 + a_8 = 2a = 8$$

22. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 77$$

$$a_{10} = a + 9d = 42$$

$$5d = -35$$

$$d = -7$$

$$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore a = 105$$

$$\therefore a_n = 105 + (n - 1) \times (-7)$$

$$= -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$112 < 7n$$

$$16 < n$$

$$\therefore n = 17$$

23. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 수열 $\{3a_n\}$ 은 공차가 9인 등차수열이다.
- ㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 공차가 6인 등차수열이다.
- ㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$ 은 공차가 6인 등차수열이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3인 등차수열의 일반항은
 $a_n = 3n + b$ (단, b 는 상수)

- ㉠ $3a_n = 9n + 3b$ 이므로 공차가 9인 등차수열 $\therefore$ 참
- ㉡ $a_{2n-1} = 3(2n - 1) + b = 6n - 3 + b$ 이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$ 참
- ㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
 $\qquad\qquad\qquad = 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$ 참

24. 공차가 $d_1 (d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 에 대하여 두 수열
 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \dots$
 $a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \dots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3
라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① $2d_2 = 3d_3$ ② $3d_2 = 2d_3$ ③ $5d_2 = 2d_3$
④ $7d_2 = 3d_3$ ⑤ $9d_2 = 4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1 + d_1, 2a_1 + 5d_1, 2a_1 + 9d_1, \dots$ 이므로 공차가 $d_2 = 4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1 + 3d_1, 3a_1 + 12d_1, 3a_1 + 21d_1, \dots$ 이므로
공차가 $d_3 = 9d_1$ 이다.
 $\therefore 9d_2 = 4d_3$

25. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div 9 \text{ } \therefore \text{ } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

26. 어떤 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이 145, 제 11항부터 제 20항까지의 합이 445이다. 이 등차수열의 제 21항부터 제 30항까지의 합은?

① 116 ② 120 ③ 124 ④ 128 ⑤ 132

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 145 \quad \therefore 2a + 9d = 29 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 145 + 445 = 590$$

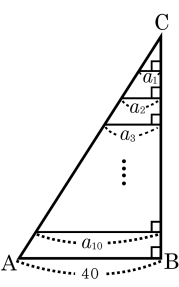
$$\therefore 2a + 19d = 59 \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $d = 3$, $a = 1$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$$S_{30} - S_{20} = \frac{30(2 \cdot 1 + 29 \cdot 3)}{2} - 590 = 745$$

27. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB 의 길이가 40인 직각삼각형 ABC 가 있다. 변 AC 를 11등분하여 변 AB 와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.



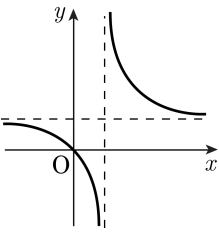
▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1 + a_{10} = 40, a_2 + a_9 = 40, \dots, a_5 + a_6 = 40$ 이므로
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 40 \times 5 = 200$

28. 다음 그림은 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

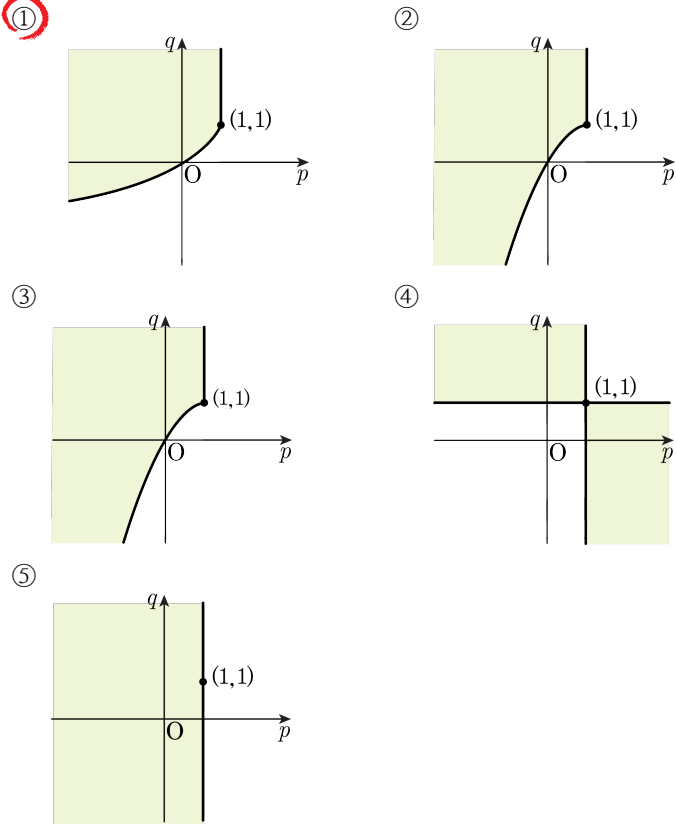


- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로
 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 에서 $a < 0, c > 0$
그리고 원점을 지나므로
 $\frac{b}{a} + c = 0, b = -ac > 0$
 $\therefore y = -\sqrt{bx+c} + a$
꼭짓점 $(-\frac{c}{b}, a), (-\frac{c}{b} < 0, a < 0)$
루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

29. 좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x-p} + q$ 의 그래프가 도형 $A = \{(x, y) \mid x = 1 \text{이고 } y \geq 1\}$ 과 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, 점 (p, q) 가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)



해설

무리함수 $y = \sqrt{x-p} + q$ 의 그래프는 점 (p, q) 에서 시작하여 오른쪽 위로 증가하는 곡선이다.
곡선 $y = \sqrt{x-p} + q$ 가 반직선 A와 만나기 위해서는 점 (p, q) 가 직선 $x = 1$ 의 왼쪽에 놓여야 한다.

$\therefore p \leq 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

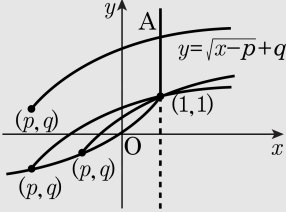
또한, 곡선 $y = \sqrt{x-p} + q$ 가 반직선 A와 한 점에서 만나는 경우 중 가장 아래쪽에 놓일 때는

곡선 $y = \sqrt{x-p} + q$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지날 때이다.

점 $(1, 1)$ 을 지나는 경우는 $1 = \sqrt{1-p} + q$ 에서 $q = 1 - \sqrt{1-p}$

$\therefore q \geq 1 - \sqrt{1-p} \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

㉠, ㉡에 의하여 구하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.



30. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

① $\frac{1}{f(x)}$

② $-f(x)$

③ $\frac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$

⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ 에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

31. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P의 좌표를 구하면?

① (1, -2)

② (-3, -1)

③ (1, 1)

④ (-2, -2)

⑤ (1, 1), (-2, -2)

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$f(x) = x$ 의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1, -2$$

$$x = 1 (\because x \geq -1)$$

$$\therefore P = (1, 1)$$

32. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_4 : a_7$ 는? (단, $a_1 \neq 0$ 이다.)

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

해설

$$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$$

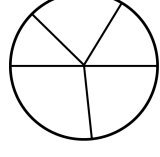
$$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$$

$$2a + 5d = 4a + 2d$$

$$3d = 2a$$

$$\begin{aligned}\therefore a_4 : a_7 &= (a + 3d) : (a + 6d) \\ &= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a \\ &= 3 : 5\end{aligned}$$

33. 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때, k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로 $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d(d>0)$ 라 하면
5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로
 $5a = 15^2\pi \quad \therefore a = 45\pi$
또, 주어진 조건부로부터

$$a+2d = 2(a-d) \text{ 에서 } d = \frac{a}{6} = \frac{15\pi}{2}$$

따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는

$$a+2d = 45\pi + 2 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi \quad \therefore k = 60$$

34. 12나 18로 나누어떨어지지 않는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 439200

해설

구하는 총합을 S 라 하고, 세 자리의 자연수 중에서 12로 나누어 떨어지는 수의 총합을 S_{12} , 18로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{18} , 36으로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{36} 이라고 하면

$S = (\text{세 자리의 자연수의 총합}) - (S_{12} + S_{18} - S_{36})$ 이다.

이때, 세 자리의 자연수의 총합은

$$100 + 101 + \cdots + 999 = \frac{900(100 + 999)}{2} = 494550 \text{ 이고}$$

$$S_{12} = 12 \cdot 9 + 12 \cdot 10 + \cdots + 12 \cdot 83$$

$$= \frac{75(108 + 996)}{2} = 41400$$

$$S_{18} = 18 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + \cdots + 18 \cdot 55$$

$$= \frac{50(108 + 990)}{2} = 27450$$

$$S_{36} = 36 \cdot 3 + 36 \cdot 4 + \cdots + 36 \cdot 27$$

$$= \frac{25(108 + 972)}{2} = 13500$$

이므로 구하는 총합 S 는

$$494550 - (41400 + 27450 - 13500) = 439200$$

35. 첫째항이 37, 공차가 -5인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n 항이 음수가 된다고 하면
 $a_n = 37 + (n - 1) \cdot (-5) < 0$
 $-5n + 42 < 0, n > \frac{42}{5} = 8.4$
 $\therefore n = 9, 10, 11, \dots$
따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때
 $a_8 = -5 \cdot 8 + 42 = 2$
 $a_9 = -5 \cdot 9 + 42 = -3$
 $a_{20} = -5 \cdot 20 + 42 = -58$
이므로 구하는 합은
 $(37 + 32 + 27 + \dots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \dots + |-58|)$
 $= \frac{8(37 + 2)}{2} + \frac{12(3 + 58)}{2} = 156 + 366 = 522$

36. 첫째항이 50이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 몇 제항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13번째 항

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \{ 2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-4) \}}{2} \\ &= \frac{n(100 - 4n + 4)}{2} \\ &= \frac{n(-4n + 104)}{2} \\ &= n(-2n + 52) \\ &= -2n^2 + 52n \\ &= -2(n^2 - 26n + 13^2 - 13^2) \\ &= -2(n - 13)^2 + 2 \times 13^2 \end{aligned}$$

$\therefore n = 13$ 일 때 최대

37. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$
(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 5$
(i), (ii) 에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$
 $\therefore a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n \quad (n \geq 2)$
 $\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$
 $= 5 + \frac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$
 $2n^2 + 2n + 1 = 221$ 에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$
그런데 $n \geq 1$ 이므로 $n = 10$

38. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250 ② 2500 ③ 2750 ④ 3000 ⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l - 1$ (단, $l \geq 0$ 인 정수)의 꼴이고,
6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m - 1$ (단, $m \geq 0$ 인 정수)의 꼴이다.

따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x 라고 하면

$$x = 4l - 1 = 6m - 1 \text{을 만족해야 하므로 } x + 1 = 4l = 6m$$

즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$ ($n \geq 1$ 인 정수)

따라서 조건을 만족하는 수열은 11, 23, 35, ...로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은

$$\frac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$$

39. 유한 등차수열 $\{a_n\}$ 과 무한 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여
 $\{a_n\} : 1, 4, 7, 10, \cdots, 200$
 $\{b_n\} : 2, 7, 12, \cdots$
일 때, 두 수열에 공통으로 포함된 수의 총합은?
- ① 1200 ② 1220 ③ 1231 ④ 1240 ⑤ 1261

해설

두 수열에 공통으로 포함된 가장 작은 수는 7 이고 두 수열의 일반항이 각각 $a_n = 3n - 2, b_n = 5n - 3$
이므로 두 수열에 공통으로 포함된 수는 적당한 자연수 p, q 에 대하여

$$3p - 2 = 5q - 3, 3p = 5q - 1$$

$$(1) q = 3k \rightarrow 5q - 1 = 15k - 1$$

$$(2) q = 3k + 1 \rightarrow 5q - 1 = 15k + 4$$

$$(3) q = 3k + 2 \rightarrow 5q - 1 = 15k + 9$$

따라서 새로운 수열을 c_n 이라 하면

$$c_n = 5q - 3 = 5(3n - 1) - 3 = 15n - 8$$

이 수열의 합은 $c_1 = 7, c_{13} = 15 \times 13 - 8 = 187$

즉, 첫째항이 7, 끝항이 187, 항수 13 인 등차수열의 합이므로

$$S_7 = \frac{13}{2} (7 + 187) = 1261$$