1. 수열 $1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ \cdots$ 의 100 번째 항은?

① -199　② -99　③ -59　④ 99　⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n-1)$

$\therefore\ a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

3. $y=\dfrac{2}{x-1}-2$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

② 치역은 $\mathrm{R}-\{-2\}$ 이다.

③ 제 2사분면을 지나지 않는다.

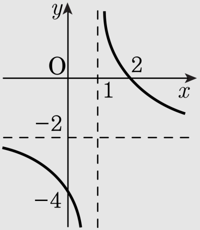
④ 점근선은 $x=1,\ y=-2$ 이다.

⑤ 정의역은 $\mathrm{R}-\{1\}$ 이다.

해설

$y=\dfrac{2}{x-1}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.



4. 함수 $y = \dfrac{ax+1}{x-b}$ 의 그래프의 점근선이$x=1,\ y=-2$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-b} \quad \Rightarrow \quad y = a + \frac{ab+1}{x-b}$$

점근선이 $x=1\ \ y=-2$ 이므로, $a=-2,\ \ b=1$

$\therefore\ \ ab=-2$

5. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=\frac{-x-1}{x-1}$ ㉡ $y=\frac{x}{x-1}$ ㉢ $y=\frac{-2x-1}{x+1}$

① ㉡ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축으로 α만큼, y축으로 β만큼 평행이동시키면 $y=\frac{1}{x-\alpha}+\beta$꼴이 된다.

㉠ $y=\frac{-x-1}{x-1}=\frac{-(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-1$

㉡ $y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

㉢ $y=\frac{-2x-1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-2$

따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

6. 분수함수 $y = \dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① $\{y \mid y < 0$ 또는 $y > 2\}$

② $\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$

③ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$

④ $\{y \mid y < 1$ 또는 $1 < y \le 2\}$

⑤ $\{y \mid y < 1$ 또는 $y \ge 2\}$

해설

분수함수 $y = \dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$x = -\dfrac{1}{a} = -1$

$\therefore\ a = 1$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \dfrac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$ 를 지나

므로

$2 = \dfrac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$

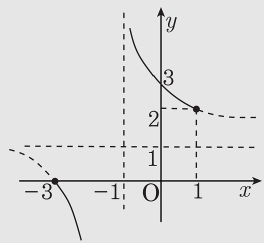
$\therefore\ y = \dfrac{x+3}{x+1}$

따라서 $-3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1$ 에서

$y = \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} + 1$ 의 그래프는

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$



7. 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y=x+r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p+q+r$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=\frac{-5}{x+4}+2$$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y=x+6$ 에 대하여 대칭이다.

$\therefore p=-4$, $q=2$, $r=6$

$\therefore p+q+r=-4+2+6=4$

8. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$가 점 $(1,2)$를 지나고 점근선이 $x=2, y=1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$이므로

$$y=\frac{ax+b}{2x+c}=\frac{k}{x-2}+1$$

또 점 $(1,2)$를 지나므로

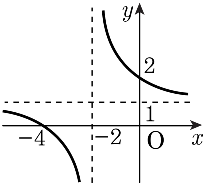
$$2=\frac{k}{1-2}+1 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore y=\frac{ax+b}{2x+c}=\frac{-1}{x-2}+1=\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-6}{2x-4}$$

$$\therefore a=2, b=-6, c=-4$$

$$\therefore a+b+c=-8$$

9. 함수 $y=\dfrac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① -1 ② -2 ③ -4

④ -7 ⑤ 0

해설

점근선이 $x=-2,\ y=1$이므로

$y=\dfrac{k}{x+2}+1 \cdots\cdots$ ①

①이 $(0,\ 2)$를 지나므로 대입하면 $k=2$

$y=\dfrac{2}{x+2}+1=\dfrac{-x-4}{-x-2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2,\ c=-4$

10. 유리함수 $y=\dfrac{bx+c}{x-a}$의 그래프가 점 $(2,7)$을 지나고 이 함수의 역함수가 $y=\dfrac{x+c}{x-3}$일 때, a, b, c의 곱 abc를 구하면?

① -27 ② -9 ③ -3 ④ 3 ⑤ 9

해설

점 $(2,7)$을 지나면 역함수는 $(7,2)$를 지난다.

$2=\dfrac{7+c}{7-3}$에서 $c=1$

이제 원래 함수를 구해보면 $y=\dfrac{x+1}{x-3}$에서

$$\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3x+1}{x-1} \cdots\cdots \text{ 역함수}$$

$\therefore a=1,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ abc=3$

11. 분수함수 $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

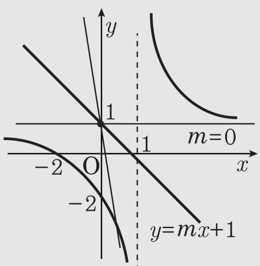
① $0 < m \le 12$　　② $-12 \le m < 0$　　③ $-12 < m \le 0$

④ $0 \le m < 12$　　⑤ $-12 \le m \le 12$

해설

$y = \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x-1+3}{x-1} = \dfrac{3}{x-1} + 1$ 이므로 함수 $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m = 0$ 일 때
두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ 와 $y = mx + 1$ 에서

$\dfrac{x+2}{x-1} = mx + 1$

즉, $mx^2 - mx - 3 = 0$

이때, 판별식을 D 라 하면

$D = m^2 + 12m < 0,\ m(m+12) < 0$

$\therefore\ -12 < m < 0$

(i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는
$-12 < m \le 0$

12. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a = -1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

ㄴ $a > 0$이면 치역은 $\{y|y \le 1\}$이다.

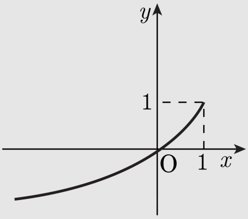
ㄷ $a < 0$이면 치역은 $\{y|y \le 1\}$이다.

ㄹ $y = \sqrt{x} + 1$의 그래프와 만날 수 있다.

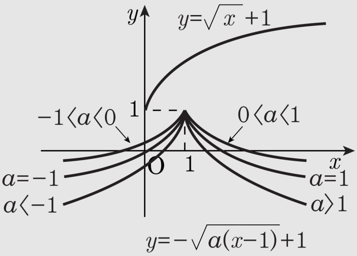
① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄹ

해설

ㄱ $a = -1$이면 주어진 무리함수는
$y = -\sqrt{-(x-1)} + 1$
$y = -\sqrt{-x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,
y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



ㄴ, ㄷ $a > 0$ 또는 $a < 0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \ge 0$이므로 치역은 $\{y|y \le 1\}$
ㄹ $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x} + 1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



13. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로

$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$

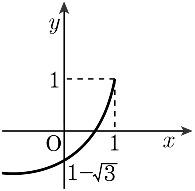
$\therefore a = -11$

또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로

$m = \sqrt{3-2\times 1}+1 = 2$

$\therefore m-a = 13$

14. 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 그림은 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x축 방향으로 1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1=-\sqrt{a(x-1)}$
즉 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$을 지나므로
$1-\sqrt{3}=-\sqrt{-a}+1$,
$\therefore a=-3$
$\therefore\ y=-\sqrt{-3(x-1)}+1$
$\therefore\ a+b+c=(-3)+3+1=1$

15. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x+k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k=-2$ 또는 $k>1$

② $k=-1$ 또는 $k<-2$

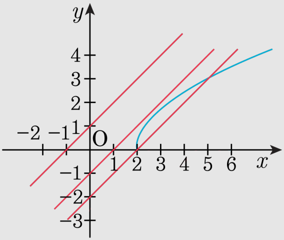
③ $k=1$ 또는 $k>2$

④ $k=2$ 또는 $k<-1$

⑤ $k=-1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k<-2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$에서

$4x-8 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

$\frac{D}{4} = (k-2)^2-(k^2+8) = -4k-4=0$에서 $k=-1$

따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

16. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ π　④ 2π　⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서

$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y | y \geq 0\}$

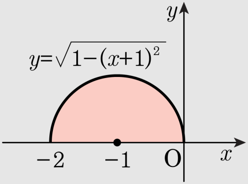
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 이므로

함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$



17. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow$ 등차수열

① 공차가 2인 경우(4가지)

2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10 4, 8, 12

18. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}, 10$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20}, 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{20}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{209}{189}$ ② $\dfrac{11}{189}$ ③ $\dfrac{209}{11}$ ④ $\dfrac{198}{209}$ ⑤ 1

해설

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면

$$1+11p=10 \Rightarrow p=\frac{9}{11}$$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 10$ 의 공차를 q 라 하면

$$1+21q=10 \Rightarrow q=\frac{9}{21}$$

$$\therefore\ \frac{a_{10}-a_1}{b_{20}-b_1}=\frac{9p}{19q}=\frac{9\cdot\dfrac{9}{11}}{19\cdot\dfrac{9}{21}}=\frac{189}{209}$$

19. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_7 = 60$일 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$의 값은?

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

해설

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $a_2,\ a_6,\ a_{10}$과 $a_5,\ a_6,\ a_7$은 모두 등차수열을 이룬다.

따라서 a_6은 a_2와 a_{10}, a_4와 a_8, a_5와 a_7의 등차중항이므로

$$\begin{aligned}
&a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} \\
&= (a_2 + a_{10}) + (a_4 + a_8) + a_6 \\
&= 2a_6 + 2a_6 + a_6 = 5a_6 \\
&= 5 \cdot \frac{a_5 + a_7}{2} = 5 \cdot \frac{60}{2} (\because\ a_5 + a_7 = 60) \\
&= 150
\end{aligned}$$

20. 서로 다른 세 정수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a,\ b,\ c$와 $b^2,\ c^2,\ a^2$이 각각 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은? (단, $0 < a < 10$)

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$a,\ b,\ c$가 등차수열을 이루므로 $2b = a + c \cdots$ ㉠

b^2, c^2, a^2이 등차수열을 이루므로 $2c^2 = b^2 + a^2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$2c^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + a^2$$

$$7c^2 - 2ac - 5a^2 = 0 \quad (7c+5a)(c-a) = 0$$

$$\therefore\ c = -\frac{5}{7}a(\because c \neq a)$$

a가 7의 배수이고, $0 < a < 10$이므로

$a = 7,\ c = -5,\ b = 1$

$\therefore\ a + b + c = 7 + 1 + (-5) = 3$

21. 수열 $\{a_n\}$은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=20$ 일 때, a_2+a_8의 값은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

$a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$을 차례로 $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$로 놓으면

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a=20$

$\therefore\ a=4$

이때, $a_2=a-3d,\ a_8=a+3d$이므로

$a_2+a_8=2a=8$

22. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 77$

$a_{10} = a + 9d = 42$

$5d = -35$

$d = -7$

$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore \; a = 105$

$$\begin{aligned} \therefore \; a_n &= 105 + (n-1) \times (-7) \\ &= -7n + 112 \end{aligned}$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n의 최솟값을 구하면

$112 < 7n$

$16 < n$

$\therefore n = 17$

23. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3 인 등차수열의 일반항은

$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$ 이므로 공차가 9 인 등차수열 $\therefore$ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$ 이므로 공차가 6 인 등차수열 $\therefore$ 참

㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$

$= 6n + 3 + b$

이므로 공차가 6 인 등차수열 $\therefore$ 참

24. 공차가 $d_1(d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ 에 대하여 두 수열
$a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ a_7+a_8, \cdots$
$a_1+a_2+a_3,\ a_4+a_5+a_6,\ a_7+a_8+a_9, \cdots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $2d_2=3d_3$ ② $3d_2=2d_3$ ③ $5d_2=2d_3$
④ $7d_2=3d_3$ ⑤ $9d_2=4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1+d_1,\ 2a_1+5d_1,\ 2a_1+9d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_2=4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1+3d_1,\ 3a_1+12d_1,\ 3a_1+21d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_3=9d_1$ 이다.
$\therefore\ 9d_2=4d_3$

25. 첫째항이 35 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$ 이므로 $d = -9$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = \frac{10(70-81)}{2} = \frac{-110}{2} = -55$$

26. 어떤 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이 145, 제 11항부터 제 20항까지의 합이 445이다. 이 등차수열의 제 21항부터 제 30항까지의 합은?

① 116 ② 120 ③ 124 ④ 128 ⑤ 132

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=145 \quad \therefore\ 2a+9d=29\cdots ㉠$$

$$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=145+445=590$$

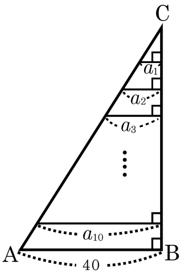
$\therefore\ 2a+19d=59\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=3,\ a=1$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$$S_{30}-S_{20}=\frac{30(2\cdot 1+29\cdot 3)}{2}-590=745$$

27. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

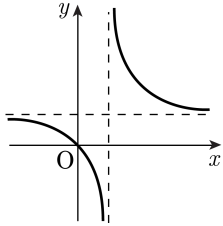
▷ 정답 : 200

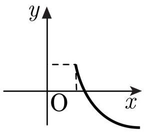
해설

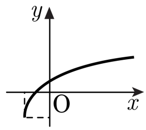
$a_1 + a_{10} = 40,\ a_2 + a_9 = 40, \cdots, a_5 + a_6 = 40$이므로

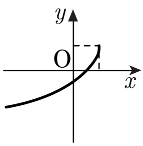
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 40 \times 5 = 200$

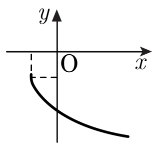
28. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

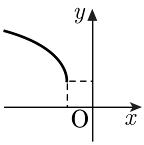


①


②


③


④


⑤


해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

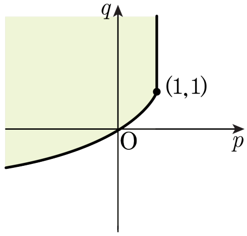
$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

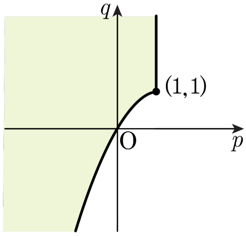
루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

29. 좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프가 도형 $A = \{(x, y) \mid x = 1$이고$y \geq 1\}$과 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, 점 (p, q)가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)

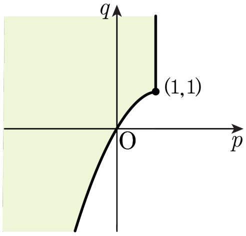
①



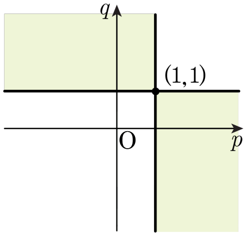
②



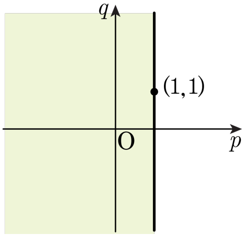
③



④



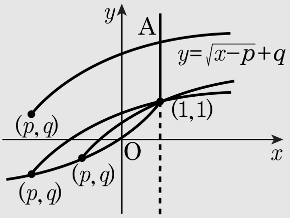
⑤



해설

무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프는 점 (p, q) 에서 시작하여 오른쪽 위로 증가하는 곡선이다.

곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$ 가 반드시 반직선 A와 만나기 위해서는 점 (p, q)가 직선 $x = 1$의 왼쪽에 놓여야 한다.



$\therefore\ p \leq 1 \cdots$ ㉠

또한, 곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 반직선 A와 한 점에서 만나는 경우 중 가장 아래쪽에 놓일 때는

곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 점 $(1, 1)$을 지날 때이다.

점 $(1, 1)$을 지나는 경우는 $1 = \sqrt{1-p}+q$에서 $q = 1-\sqrt{1-p}$

$\therefore\ q \geq 1-\sqrt{1-p} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

30. $x^2 \neq 1$이고 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때 $f(-x)$는?

① $\dfrac{1}{f(x)}$ ② $-f(x)$ ③ $\dfrac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$ ⑤ $f(x)$

해설

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$에서

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

31. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -2)$　　② $(-3,\ -1)$

③ $(1,\ 1)$　　④ $(-2,\ -2)$

⑤ $(1,\ 1)$, $(-2,\ -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x좌표는
$f(x) = x$의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$에서
$x^2 + x - 2 = 0$
$x = 1, -2$
$x = 1(\because\ x \geq -1)$
$\therefore\ \mathrm{P} = (1, 1)$

32. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_4 : a_7$는? (단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

$$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$$

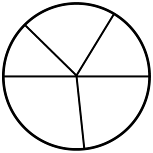
$$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$$

$$2a + 5d = 4a + 2d$$

$$3d = 2a$$

$$\begin{aligned} \therefore \ a_4 : a_7 &= (a + 3d) : (a + 6d) \\ &= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

33. 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때, k의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로
$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d(d>0)$라 하면
5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로
$5a = 15^2\pi \quad \therefore\ a = 45\pi$
또, 주어진 조건부으로부터
$a+2d = 2(a-2d)$에서 $d = \dfrac{a}{6} = \dfrac{15\pi}{2}$
따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는
$a+2d = 45\pi + 2\cdot\dfrac{15}{2}\pi = 60\pi \quad \therefore\ k = 60$

34. 12 나 18 로 나누어떨어지지 않는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 439200

해설

구하는 총합을 S 라 하고, 세 자리의 자연수 중에서 12 로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{12}, 18 로 나누어떨어이지는 수의 총합을 S_{18}, 36 으로 나누어떨이지는 수의 총합을 S_{36} 이라고 하면

$S =$ (세 자리의 자연수의 총합)

$\quad - (S_{12} + S_{18} - S_{36})$ 이다.

이때, 세 자리의 자연수의 총합은

$100 + 101 + \cdots + 999 = \dfrac{900(100 + 999)}{2} = 494550$ 이고

$S_{12} = 12 \cdot 9 + 12 \cdot 10 + \cdots + 12 \cdot 83$

$= \dfrac{75(108 + 996)}{2} = 41400$

$S_{18} = 18 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + \cdots + 18 \cdot 55$

$= \dfrac{50(108 + 990)}{2} = 27450$

$S_{36} = 36 \cdot 3 + 36 \cdot 4 + \cdots + 36 \cdot 27$

$= \dfrac{25(108 + 972)}{2} = 13500$

이므로 구하는 총합 S 는

$494550 - (41400 + 27450 - 13500) = 439200$

35. 첫째항이 37, 공차가 -5 인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n항이 음수가 된다고 하면

$a_n = 37 + (n-1) \cdot (-5) < 0$

$-5n + 42 < 0, \ n > \dfrac{42}{5} = 8.4$

$\therefore \ n = 9, \ 10, \ 11, \cdots$

따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때

$a_8 = -5 \cdot 8 + 42 = 2$

$a_9 = -5 \cdot 9 + 42 = -3$

$a_{20} = -5 \cdot 20 + 42 = -58$

이므로 구하는 합은

$(37 + 32 + 27 + \cdots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \cdots + |-58|)$

$= \dfrac{8(37+2)}{2} + \dfrac{12(3+58)}{2} = 156 + 366 = 522$

36. 첫째항이 50이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13번째 항

해설

$$S_n = \frac{n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}$$
$$= \frac{n(100-4n+4)}{2}$$
$$= \frac{n(-4n+104)}{2}$$
$$= n(-2n+52)$$
$$= -2n^2+52n$$
$$= -2(n^2-26n+13^2-13^2)$$
$$= -2(n-13)^2+2\times 13^2$$

$\therefore n = 13$일 때 최대

37. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

38. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250 ② 2500 ③ 2750 ④ 3000 ⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l-1$(단, $l \geq 0$인 정수)의 꼴이고,
6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m-1$(단, $m \geq 0$인 정수)의 꼴이다.
따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x라고 하면
$x = 4l - 1 = 6m - 1$을 만족해야 하므로 $x + 1 = 4l = 6m$
즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$($n \geq 1$ 인 정수)
따라서 조건을 만족하는 수열은 11, 23, 35, $\cdots$ 로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은

$$\frac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$$

39. 유한 등차수열 $\{a_n\}$과 무한 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$\{a_n\}$: 1, 4, 7, 10, $\cdots$, 200

$\{b_n\}$: 2, 7, 12, $\cdots$

일 때, 두 수열에 공통으로 포함된 수의 총합은?

① 1200　② 1220　③ 1231　④ 1240　⑤ 1261

해설

두 수열에 공통으로 포함된 가장 작은 수는 7이고 두 수열의 일반항이 각각 $a_n = 3n - 2,\ b_n = 5n - 3$

이므로 두 수열에 공통으로 포함된 수는 적당한 자연수 $p,\ q$에 대하여

$3p - 2 = 5q - 3,\ 3p = 5q - 1$

(1) $q = 3k \ \rightarrow\ 5q - 1 = 15k - 1$

(2) $q = 3k + 1 \ \rightarrow\ 5q - 1 = 15k + 4$

(3) $q = 3k + 2 \ \rightarrow\ 5q - 1 = 15k + 9$

따라서 새로운 수열을 c_n이라 하면

$c_n = 5q - 3 = 5(3n - 1) - 3 = 15n - 8$

이 수열의 합은 $c_1 = 7,\ c_{13} = 15 \times 13 - 8 = 187$

즉, 첫째항이 7, 끝항이 187, 항수 13인 등차수열의 합이므로

$$S_7 = \frac{13}{2}(7 + 187) = 1261$$