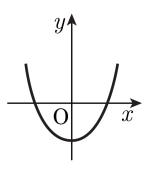
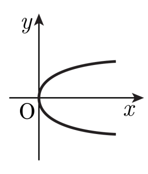
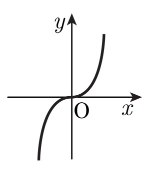
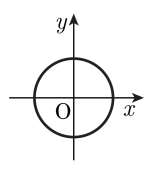
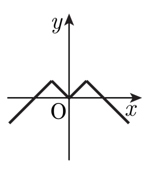
1. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

2. 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 보기 중 함수 $f: X \to X$로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x)=-x$ ㉡ $f(x)=x^2$ ㉢ $f(x)=|x|$

㉣ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ㉤ $f(x)=\sqrt{x}$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x)=-x$에서 $f(-1)=1\in X,\ f(0)=0\in X,\ f(1)=-1\in X$
따라서 함수이다.
㉡ $f(x)=x^2$에서 $f(-1)=1\in X,\ f(0)=0\in X,\ f(1)=1\in X$
따라서 함수이다.
㉢ $f(x)=|x|$에서 $f(-1)=1\in X,\ f(0)=0\in X,\ f(1)=1\in X$
따라서 함수이다.
㉣ $f(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.
㉤ $f(x)=\sqrt{x}$에서 $f(-1)=i\notin X$이므로 함수가 아니다.
따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

3. 두 집합 $X=\{-4,-2,0,2,4\}$, $Y=\{0,1,2,3,4\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수 f를 다음과 같이 정의할 때, 이 함수의 치역을 구하면?

$$f(x)=\begin{cases} |x|-1 & (x<0) \\ x & (x=0) \\ \dfrac{x^2}{4} & (x>0) \end{cases}$$

① $\{0,1,2\}$ ② $\{0,1,3\}$ ③ $\{0,1,2,3\}$

④ $\{0,1,2,4\}$ ⑤ $\{0,1,3,4\}$

해설

$f(-4)=|-4|-1=3$

$f(-2)=|-2|-1=1$

$f(0)=0$

$f(2)=\dfrac{4}{4}=1$

$f(4)=\dfrac{16}{4}=4$

$\therefore$ 치역 :$\{0,\ 1,\ 3,\ 4\}$

4. 정의역이 $X = \{-1, 1\}$ 일 때 항등함수가 될 수 없는 것을 고르면?

① $f(x) = x$ ② $f(x) = x^2$ ③ $f(x) = \frac{1}{x}$

④ $f(x) = x^3$ ⑤ $f(x) = x|x|$

해설

$f(a) = a$ 가 항등함수의 정의이므로
①, ③, ④, ⑤ : $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$
② : $f(-1) = f(1) = 1$ 이므로
②는 항등함수가 될 수 없음

5. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

보기

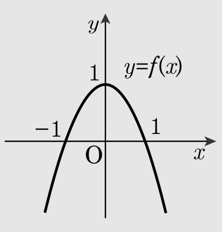
㉠ $f(x) = 1 - x^2$ ㉡ $g(x) = 3x - 2$

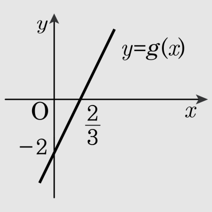
㉢ $h(x) = |x| + 2x + 1$

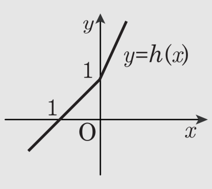
① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉢에서 $x \geq 0$ 일 때 $h(x) = 3x + 1$ 이고, $x < 0$ 일 때 $h(x) = x + 1$ 이므로
㉠, ㉡, ㉢의 세 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

㉠


㉡


㉢


따라서 보기 중 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢이다.

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기> 에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.

㉡ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.

㉢ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$

㉡ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$

그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$

㉢ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

7. 집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 에서 세 함수 f, g, h 는 각각 X 에서 X 로의 일대일 대응, 상수함수, 항등함수이고, 다음 두 조건을 만족시킨다.

ㄱ. $f(0) = g(1) = h(2)$
ㄴ. $2f(1) + f(2) = f(0)$

이때, $f(2) + g(2) + h(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$h(x)$가 항등함수이므로 $h(2) = 2$
조건 ㄱ에 의해, $f(0) = g(1) = h(2) = 2$
$g(x)$는 상수함수이므로 $g(0) = g(1) = g(2) = 2$
$f(x)$는 일대일 대응이고 $f(0) = 2$이므로
$f(1) = 0, f(2) = 1$ 또는 $f(1) = 1, f(2) = 0$
(i) $f(1) = 0, f(2) = 1$일 때
$2f(1) + f(2) = 1 \neq 2 = f(0)$
(ii) $f(1) = 1, f(2) = 0$일 때
$2f(1) + f(2) = 2 = f(0)$
(i), (ii)에 의해
조건 ㄴ을 만족하는 것은
$f(1) = 1, f(2) = 0$일 때이다.
$\therefore f(2) + g(2) + h(2) = 0 + 2 + 2 = 4$

8. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87 ② 88 ③ 105 ④ 144 ⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64$ 가지
일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로
a 가 선택 가능한 개수 : 4
b 가 선택 가능한 개수 : 3
c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ 가지
$\therefore\ 64 + 24 = 88$

9. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 가 있다. A 에서 B 로의 일대일함수 f 중 $f(1)=4$ 를 만족하는 f 의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(1)=4$ 이므로 $\{2,\ 3\}$ 에서
$\{5,\ 6,\ 7\}$ 로 가는 일대일 함수의 개수와 같다.
$\therefore\ 3\times 2=6$

10. 집합 X를 정의역으로 하는 함수 $f(x)=x^2+2x$가 항등함수가 되도록 하는 집합 X의 개수는 몇 개인가? (단, $X \neq \phi$)

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

$f(x)=x^2+2x$가 항등함수가 되려면
$f(x)=x$를 만족해야 한다.
즉, $x^2+2x=x$에서
$x^2+x=0,\ x(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1,\ 0$
따라서 집합 X는 집합 $\{-1,\ 0\}$의
공집합이 아닌 부분집합이므로
집합 X의 개수는 $2^2-1=3$(개)

11. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a,\ f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 이므로 $f : A \to B$ 가 일대일 대응이려면
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

12. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f:A\rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)=0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)\neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5-2^5=211$

13. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

① x ② $3-x$ ③ $x-3$ ④ 0 ⑤ 3

해설

(ⅰ) x가 유리수일 때, $f(x)=x$ 이므로,
$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x)=x$
(ⅱ) x가 무리수일 때,
$f(x)=3-x$ 로 무리수이므로,
$(f \circ f)(x)=f(f(x))=3-f(x)=3-(3-x)=x$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $(f \circ f)(x)=x$

14. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $-2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$

$\therefore\ k = -6$

15. 두 함수 $f(x) = x+3$, $g(x) = 2x-1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$
한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면
$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k+3 = 1$ 이므로 $k = -2$
$\therefore\ h(1) = -2$

16. 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=-4x-5$ 일 때, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h\circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5　② 3　③ 1　④ -3　⑤ -5

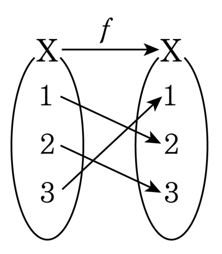
해설

$h(x)=ax+b$ 로 놓으면
$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x+3)$
$=a(2x+3)+b=2ax+3a+b$
그런데, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 이므로
$2ax+3a+b=-4x-5,$
$2a=-4,\ 3a+b=-5$
즉, $a=-2, b=1$ 이므로 $h(x)=-2x+1$
$(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)=-5$

해설

$(h\circ f)(x)=g(x)$ 에서
$h(f(x))=g(x)$ 이고 $f(x)=2x+3$ 이므로
$h(2x+3)=g(x)$
또한, $(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)$
$h(3)=g(0)=-5$

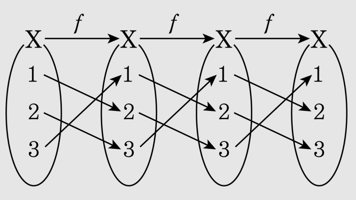
17. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$

같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.

$\therefore f^3(x) = x$ 이므로

$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x)$,

$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$

$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2,\ f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$

$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

18. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$)

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

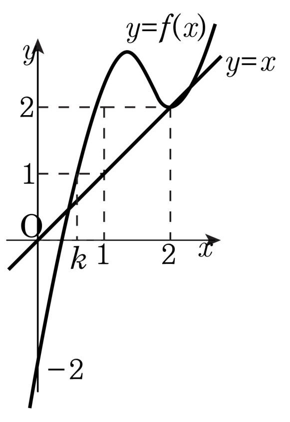
해설

$f(-1) = \dfrac{1}{2}$, $f^2(-1) = 2$, $f^3(-1) = -1$, $f^4(-1) = \dfrac{1}{2}$ $\cdots$

주기가 3 으로 반복되므로

$f^{101} = (f^3)^{33} \circ f^2 = f^2 = 2$

19. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f,\ f^3 = f^2 \circ f,\ f^n = f^{n-1} \circ f$)



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 5　　⑤ 11

해설

$f(k) = 1$

$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$

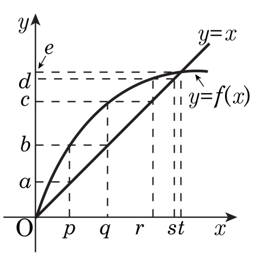
$f^3(k) = f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1)$

$= f(f(1)) = f(2) = 2$

$\vdots$

$f^{10}(k) = 2$

20. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

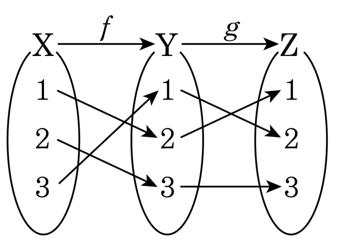
그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

21. 두 함수 f, g의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1}\circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(f^{-1}\circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$

f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

22. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x) = |x-2| + kx - 5$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$
② $-1 < k < 1$
③ $k < 1$
④ $k < -1$ 또는 $k > 1$
⑤ $k > 1$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k+1)x - 7$
$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k-1)x - 3$
그런데 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서, $(k+1)(k-1) > 0$ 이므로
$k < -1$ 또는 $k > 1$

23. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x+2)=6x-3$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2)=6x-3$에서 $3x+2=t$라 하면

$f(t)=2t-7$이므로 $f(x)=2x-7$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

$\therefore g(3)=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$

24. 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3,\ -2)$를 지날 때, $a+b$의 값은 얼마인가?

① -2　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로
$f(3)=-2 \quad \therefore 3a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프도
점 $(3,\ -2)$를 지나므로
$f^{-1}(3)=-2 \quad \therefore f(-2)=3$
$\therefore -2a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=1$
$\therefore a+b=0$

25. 함수 $f(x) = 4x^2 - kx(x \geq 0)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 하고 $f^{-1}(2) = 1$ 일 때, $(f \circ f^{-1})(2) - (f^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(1) = 2$

따라서 $f(1) = 4 - k = 2$

$\therefore k = 2$

$(f \circ f^{-1})(2) = f\left(f^{-1}(2)\right) = f(1) = 2$

$(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}\left(f(1)\right) = f^{-1}(2) = 1$

$\therefore (f \circ f^{-1})(2) - (f^{-1} \circ f)(1) = 1$

26. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

27. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 기함수이고 $f(1) = 3$을 만족시킬 때, $a + b - c$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(-x) = -f(x)$

$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$

따라서 $a = 0$, $c = 0$ $\therefore f(x) = bx$

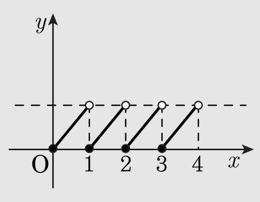
$f(1) = 3$이므로 $f(1) = b = 3$

$\therefore a + b - c = 3$

28. $y = x - [x](0 \le x \le 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 4　④ $4\sqrt{2}$　⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서
i) $0 \le x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$
ii) $1 \le x < 2$, $y = x - 1$
iii) $2 \le x < 3$, $y = x - 2$
iv) $3 \le x \le 4$, $y = x - 3$
i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로
$4\sqrt{2}$ 가 된다.

29. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}$$
$$+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}=\frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x(x+8)}=\frac{4}{x(x+8)}$$
$$=\frac{4}{9}$$

$\therefore x(x+8)=9$

$x^2+8x-9=(x-1)(x+9)=0$

$x>0$ 이므로 $x=1$

30. $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{18\cdot20}$ 을 계산한 값은?

① 0　② $\frac{9}{20}$　③ 40　④ $\frac{40}{9}$　⑤ $\frac{9}{40}$

해설

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\cdots-\frac{1}{20}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{20}=\frac{9}{40}$$

31. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 학생의 비는 $3:2$이고 합격자의 남녀 학생의 비는 $6:5$, 불합격자의 남녀 학생의 비는 $12:7$이었다. 남학생의 합격률을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

	수험자	합격자	불합격자
남학생	$3k$	$6m$	$12n$
여학생	$2k$	$5m$	$7n$

$3k = 6m + 12n \cdots$ ㉠

$2k = 5m + 7n \cdots$ ㉡

㉠ $\times 7 -$ ㉡ $\times 12$에서 $-3k = -18m$

$\therefore \frac{m}{k} = \frac{1}{6}$

(남학생의 합격률)$= \frac{6m}{3k} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

32. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

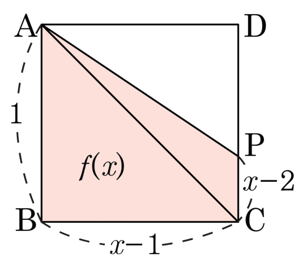
$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

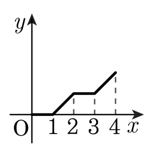
$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

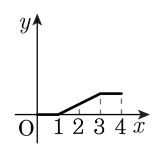
$\therefore$ (준 식) $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

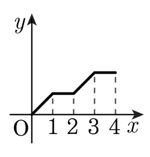
$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

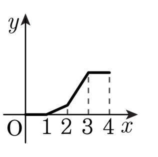
33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

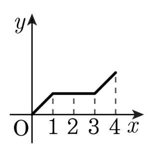


①


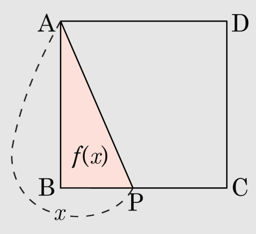
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

34. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$　② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$　④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$

35. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

36. 두 집합 $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

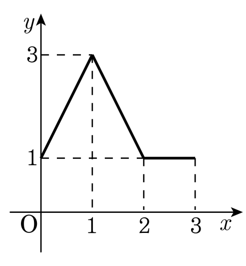
① 2 개　　② 5 개　　③ 10 개

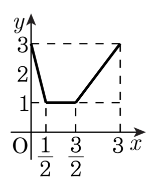
④ 20 개　　⑤ 120 개

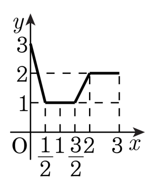
해설

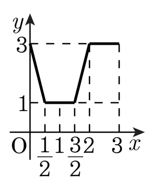
$x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X=\{1,\ 2\}$ 이고 $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 　5 가지
$f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지
$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(개)

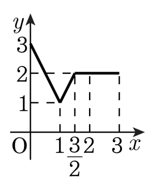
37. 함수
$y = f(x)\,(0 \le x \le 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y = (f \circ f)\,(x)\,(0 \le x \le 3)$ 의 그래프는 무엇인가?

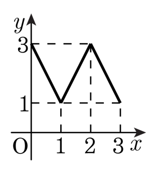


①


②


③


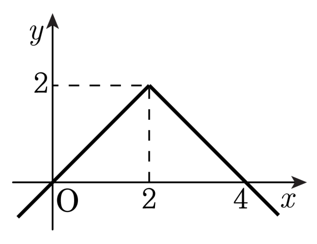
④


⑤


해설

$0 \le x \le 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가
$x = 1$ 에 대하여 대칭이므로
$y = (f \circ f)\,(x)$ 의 그래프도
$0 \le x \le 2$ 에서 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.
$y = (f \circ f)\,(x) = f\,(f(x))$ 에서
$f\,(f(0)) = f(1) = 3$
$f(f(1)) = f(3) = 1$
$f(f(2)) = f(1) = 3$
$f\,(f(3)) = f(1) = 3$
따라서, $y = (f \circ f)\,(x)$ 를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

38. $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f\circ f)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x)=\begin{cases} y=x(x\le 2) & \cdots ㉠ \\ y=-x+4(x>2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)=x$

$\therefore x=1$

㉡에서는 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+4)$
$=-x+4$

$\therefore x=3$

실근의 개수 : 2 개.

39. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

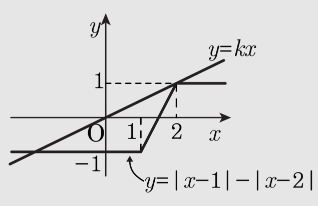
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) + (x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ①이다.

40. 임의의 자연수에 대하여 함수 f 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$ 의 값은?

(가) $f(1)=1,\ f(2)=2$
(나) $f(x+1)=f(x+2)+f(x)$

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

(나)에서 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$ 이므로
$f(3)=f(2)-f(1)=2-1=1$
$f(4)=f(3)-f(2)=1-2=-1$
$f(5)=f(4)-f(3)=-1-1=-2$
$f(6)=f(5)-f(4)=-2-(-1)=-1$
$f(7)=f(6)-f(5)=-1-(-2)=1$
$f(8)=f(7)-f(6)=1-(-1)=2$
$\vdots$
따라서 $f(1)=f(7),\ f(2)=f(8),\ f(3)=f(9),\ \cdots,$
$f(x)=f(x+6)$ 이고
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$ 이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$
$=334\{f(1)+f(2)+\cdots+f(5)+f(6)\}$
$\quad+f(2005)+f(2006)+f(2007)+f(2008)$
$=334\cdot 0+1+2+1+(-1)=3$

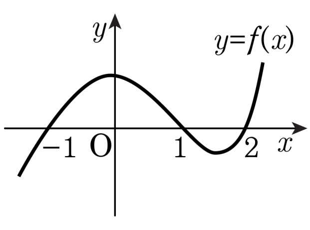
41. $f(x)=|x-2|$ 일 때, $(f\circ f\circ f)(x)=0$ 의 모든 실근의 합을 구하면?

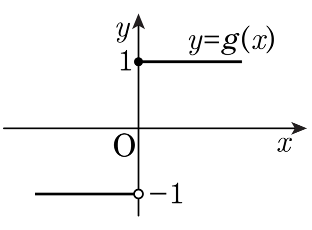
① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 0

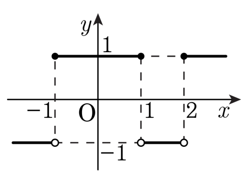
해설

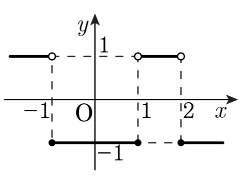
$f(2)=0$ 이므로
$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=0$ 에서
$(f\circ f)(x)=2$
또, $f(4)=2$, $f(0)=2$ 이므로
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=2$ 에서
$f(x)=4$ 또는 $f(x)=0$
(ⅰ) $f(x)=|x-2|=4$ 일 때, $x=6$ 또는 $x=-2$
(ⅱ) $f(x)=|x-2|=0$ 일 때, $x=2$
따라서 모든 실근의 합은 $(-2)+6+2=6$

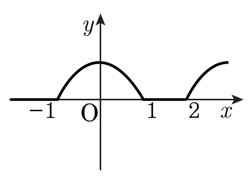
42. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f, g 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 그래프는?

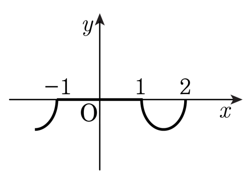


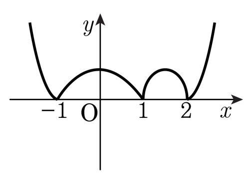


①


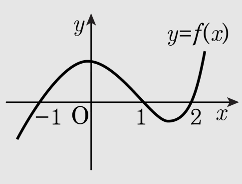
②


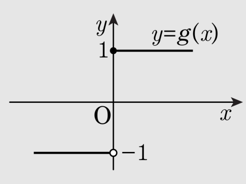
③


④


⑤


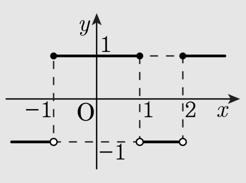
해설



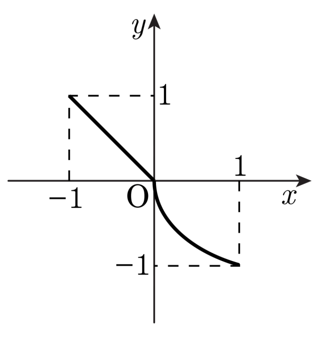


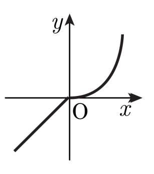
$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

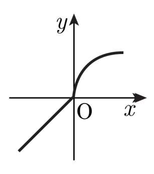
$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 1,\ 2 \leq x) \\ -1 & (x < -1,\ 1 < x < 2) \end{cases}$

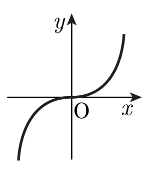


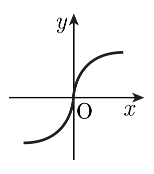
43. $1 \le x \le 1$ 에서 정의된 함수 f 를 $f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \le x \le 0) \\ -\sqrt{x} & (0 \le x \le 1) \end{cases}$ 로 정의하고, $g = f \circ f$ 라 할 때. 다음 중 $g^{-1}(x)$ 의 그래프를 그리면?

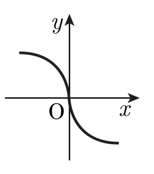


①


②


③


④


⑤


해설

$-1 \le x \le 0$ 일 때, $f(x) = -x \ge 0$ 이므로
$g(x) = f(f(x)) = f(-x) = -\sqrt{-x}$ 이다.
$0 \le x \le 1$ 일 때 $f(x) = -\sqrt{x} < 0$ 이므로
$g(x) = f(f(x)) = f(-\sqrt{x}) = -(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \le x \le 1) \\ -\sqrt{-x} & (-1 \le x \le 0) \end{cases}$ 이므로

$y = g(x)$ 의 그래프는 ④이다.
또한 $y = g^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로
③이다.

44. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이고, $f(4)=1,\ g(1)=-3$ 일 때, $f(-4)+g(-1)$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x)$ 는 우함수이므로 $f(-4)=f(4)=1$ $g(x)$ 는 기함수이므로
$g(-1)=-g(1)=3$
$\therefore f(-4)+g(-1)=1+3=4$

45. 무리식 $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\cdots}}}}=p$, $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}}=q$

라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6}}}}\cdots=x$ 라 두면

$\sqrt{6-x}=x$ 양변을 제곱하면

$x^2=6-x,\ x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3,\ 2$

여기서 $x>0$ 이므로 $x=2$

$\therefore p=2$

(ii) 주어진 식을 a 라 하면

$2-\frac{1}{a}=a,\ a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$

$\therefore a=1 \quad \therefore q=1$

$\therefore p+q=3$