1. 두 집합 $A = \{x | x$는 10 이상 15 이하의 자연수$\}$, $B = \{x | x$는 12 이상 18 미만의 3의 배수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X) = 4$

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
$B = \{12,\ 15\}$
$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 집합이므로
$\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$의 6 개이다.

2. 원소의 개수가 3 인 집합 A 가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $5 \in A$
> (나) $x \in A$ 이면 $\frac{1}{1-x} \in A$

이 때 집합 A 의 모든 원소의 곱은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$5 \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4} \in A$

또 $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \in A$

$\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \in A$

$A = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5\right\}$ 에서 A 의 모든 원소의 곱은 $-\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times 5 = -1$

이다.

3. 다음 보기 중에서 집합인 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 큰 컴퓨터들의 모임

㉡ 10보다 큰 자연수들의 모임

㉢ MP3를 많이 가진 학생들의 모임

㉣ 게임을 잘하는 학생들의 모임

㉤ 0과 1 사이에 있는 자연수의 모임

㉥ 우리 반에서 PMP를 가진 학생들의 모임

① ㉡, ㉣ ② ㉤, ㉥ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉣, ㉤ ⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

㉠ '큰' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

㉢ '많이' 라는 단어는 명확한 기준이 없으므로 집합이 될 수 없다.

㉣ '잘하는' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

㉤ 0과 1 사이에는 자연수가 존재하지 않는다.
즉, 원소가 하나도 없는 집합을 의미한다. 그러므로 집합이다.

4. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 2 의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 28 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 2 의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 3, 5 로 만든 부분집합이므로 $2^2 = 4$ (개) 이다.

$\therefore\ 32 - 4 = 28$ (개)

5. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{2,\ 3,\ 4\}$, $C = \{1,\ 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A \times B = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),$
$(3,\ 3),\ (3,\ 4)\}$

$A \times C = \{(1,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 4)\}$

$\therefore\ (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)\}$

$\therefore\ n((A \times B) \cap (A \times C)) = 3$

6. 집합 $A_n = \{x \mid 3n-1 \le x \le 9n+6,\ n$은 자연수$\}$에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$이 성립하는 n의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

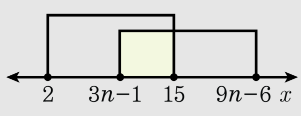
$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$이므로

$A_1 \cap A_n \neq \varnothing$

$A_1 = \{x \mid 2 \le x \le 15\}$,

$A_n = \{x \mid 3n-1 \le x \le 9n+6\}$

A_1, A_n을 수직선 위에 나타낼 때 아래와 같은 꼴이어야 문제의 조건을 만족시킨다.



따라서, $3n-1 \le 15$, $n \le \frac{16}{3}$ $\therefore$ 최댓값은 $n = 5$($\because$ n은 자연수)

7. 두 집합 $A = \{2,\ 1,\ a+3,\ b\}$, $B = \{4,\ a,\ b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

(ⅰ) $a+3=4$ 일 때, $a=1$
$A = \{2,\ 1,\ 4,\ b\}$
$B = \{4,\ 1,\ b+1\}$
$b+1=2,\ b=1(\times)$
(ⅱ) $b=4$ 일 때,
$A = \{2,\ 1,\ a+3,\ 4\}$
$B = \{4,\ a,\ 5\}$
$a+3=5,\quad a=2(\bigcirc)$
$\therefore\ a+b=2+4=6$

8. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답: 명

▷ 정답: 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.
수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 한다.
수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.
$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$50 = 35 + 25 - x$
x 의 최솟값은 10 명이다.
최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함될 때 성립한다.
그러므로 x 의 최댓값은 25 명이다.
최솟값과 최댓값의 합은 35 명이다.

9. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

해설

$A \cap B = \{4,\ 8\}$

$A * B = \{2,\ 6\}$

$B \cap (A * B) = \varnothing$

$B * (A * B) = B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

10. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,6,7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A=\{2,4,6\}, A\cap B=\{2\}, B\cap A^c=\{1,3,5\}, A^c\cap B^c=\{7\}$ 일 때, A^c 은?

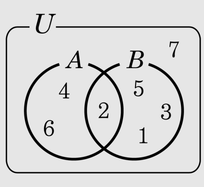
① $\{1,3\}$ ② $\{1,5\}$ ③ $\{1,7\}$

④ $\{3,5,7\}$ ⑤ $\{1,3,5,7\}$

해설

$B\cap A^c=\{7\}=B-A$ 이므로

$A^c=U-A=\{1,3,5,7\}$ 이다.



11. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

② $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

③ $(A - B) \cup (A - B^c) = A$

④ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

해설

$(A-B)\cap(A-C) = (A\cap B^c)\cap(A\cap C^c) = A\cap(B^c\cap C^c) = A\cap(B\cup C)^c$
$= A - (B \cup C)$

12. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $(A_{24} \cup A_{18}) \subset A_k$ 를 만족하는 k 의 최댓값은 ?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 18

해설

$A_{18} \subset A_k$ 이고 $A_{24} \subset A_k$ 이므로 k 는 18, 24 의 공약수이고, 이 중에서 최대인 것은 6 이다.

13. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

㉠ $A_5 \cap A_7 = \varnothing$

㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$

㉢ m, n이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $m = kn$(k는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

① ㉠, ㉡, ㉣　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$
㉡ $A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$
$A_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$ 이므로
$A_4 \cup A_6 = \{4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\} \neq A_4$
㉢ $A_m = \left\{m,\ 2m,\ \cdots,\ nm,\ (n+1)m,\ \cdots\right\}$
$A_n = \left\{n,\ 2n,\ \cdots,\ mn,\ (m+1)n,\ \cdots\right\}$
m, n이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
㉣ $A_m = A_{kn} = \{kn,\ 2kn,\ 3kn,\ \cdots\}$
$A_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \cdots\}$이므로
$A_m \subset A_n$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A\triangle B = (A\cap B)\cup(A\cup B)^c$ 라고 정의할 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 <u>없는</u> 것은?(단, $U \neq \varnothing$)

① $A\triangle U = U$ ② $A\triangle B = B\triangle A$ ③ $A\triangle\varnothing = A^c$
④ $A\triangle B = A^c\triangle B^c$ ⑤ $A\triangle A^c = \varnothing$

해설

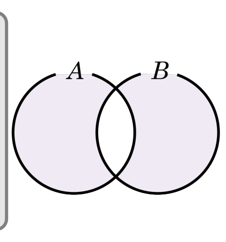
$A\triangle B = (A\cap B)\cup(A\cup B)^c$ 에 따라 $A\triangle U = A$

15. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$로 정의할 때, 다음 중에서 $(A\triangle B)\triangle A$와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A\cap B$ ④ $A\cup B$ ⑤ $A-B$

해설

$A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $(A\triangle B)\triangle A = [(A\triangle B)-A]\cup[A-(A\triangle B)] = (B-A)\cup(A\cap B) = B$



16. 두 집합 A, B에 대하여 $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$를 만족할 때, 다음 중 $(A \triangle B) \triangle A$와 같은 것은 ?

① A ② B ③ $A \cup B$

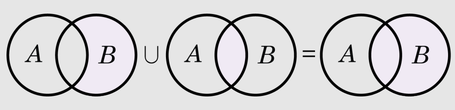
④ $A \cap B$ ⑤ $A \cap B^c$

해설

$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

$\therefore \ (A \triangle B) \triangle A = [(A \triangle B) - A] \cup [A - (A \triangle B)]$

벤 다이어그램으로 설명하면 다음과 같다.



$[(A \triangle B) - A] \cup [A - (A \triangle B)] = B$

17. 어느 학급의 학생 35명 중에서 버스를 타고 통학하는 학생이 22명, 지하철을 타고 통학하는 학생이 18명, 버스와 지하철을 모두 타지 않는 학생이 10명이다. 버스와 지하철을 모두 이용하여 통학하는 학생 수는?

① 10명 ② 13명 ③ 15명 ④ 18명 ⑤ 20명

해설

학생의 전체의 집합을 U, 버스, 지하철로 통학하는 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면 $n(U) = 35$, $n(A) = 22$, $n(B) = 18$, $n(A^c \cap B^c) = 10$

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 에서

$n(A \cup B) = 35 - 10 = 25$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$n(A \cap B) = 22 + 18 - 25 = 15$

18. 집합 $A = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{4\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $1 \in A$　　② $3 \notin A$　　③ $4 \notin A$

④ $\{4\} \in A$　　⑤ $\{2, 3\} \in A$

해설

집합 A 의 원소들은 1, 2, 3, $\{2, 3\}$, $\{4\}$ 이다.
옳은 것은 ①,③,④,⑤ 이다.
② $3 \notin A$ 은 $3 \in A$ 가 맞다.

19. 집합 $A=\{(x,\ y)|ax-by=12\}$에 대하여 $(6,\ 2)\in A$, $(-3,\ -2)\in A$ 일 때, $a+b$의 값은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 26 ⑤ 30

해설

$(6,\ 2)\in A$ 이므로 $x=6$, $y=2$
$6a-2b=12,\ 3a-b=6\ \cdots$ ㉠
$(-3,\ -2)\in A$ 이므로 $x=-3,\ y=-2$
$-3a+2b=12\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $b=18$
㉠에서 $3a-18=6\ \therefore\ a=8$
$\therefore\ a+b=26$

20. 다음 중 집합의 원소가 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{0\}$

② $\{x|x$는 4의 약수 중 홀수$\}$

③ $\{x|x$는 $3\times x=0$인 자연수$\}$

④ $\{x|x$는 $11<x<12$인 자연수$\}$

⑤ $\{x|x$는 $x\le 1$인 자연수$\}$

해설

① $\{0\}$
② $\{1\}$
⑤ $\{1\}$

21. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x\text{는 40 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x\text{는 } 2 < x < 4\text{인 홀수}\}) = 1$

해설

① $n(\phi) = 0,\ n(\{0\}) = 1$
② $n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{1,\ 4\}) = 3 - 2 = 1$
③ $n(\{4\}) = 1$
④ $n(\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 40\}) = 20$
⑤ $n(\{3\}) = 1$

22. 집합 $A = \{\phi, 1, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 $P(A) = \{X | X \subset A\}$ 라 정의 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

㉠ $\phi \in P(A)$	㉡ $A \subset P(A)$	㉢ $A \in P(A)$
㉣ $\{1\} \subset P(A)$	㉤ $\{1, 2\} \in P(A)$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$P(A)$는 A의 부분집합들을 원소로 하는 집합이다.
㉡$A \in P(A)$ ㉣$\{1\} \in P(A)$ ㉤$\{\{1, 2\}\} \in P(A)$
$\therefore$ ㉠, ㉢만 옳다.

23. 집합 A 의 부분집합 중에서 원소 6, 7 을 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 8 개일 때, 집합 A 의 원소의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$8 = 2^3$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$n - 2 = 3,\ \ n = 5,\ \ n(A) = 5$

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?(단, $U \neq \varnothing$)

① $A \cup B = B$ ② $A \cap B = A$ ③ $(A \cap B)^c = B^c$

④ $B^c \subset A^c$ ⑤ $A - B = \varnothing$

해설

③ $A \subset B$ 이면 A 와 B 의 교집합이 A 이므로 $A^c = B^c$ 라는 식으로 되는데 $A \subset B$ 인 경우 항상 성립하지는 않는다.

25. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (정답 2개)

① $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 0$

② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$

④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \varnothing$

⑤ $n(A) = 0$, $n(B) \neq 0$ 이면 $B \subset A$ 이다.

해설

① $A = \{\varnothing\}$ 이면 집합 A 의 원소가 $\varnothing$ 이므로, $n(A) = 1$ 이다.
③ 예를 들어 $A = \{2, 3, 5\}$ 이고, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만, $A \not\subset B$ 이다.
⑤ $A = \varnothing$ 이므로, 집합 A 의 부분집합은 $\varnothing$ 하나 밖에 없다.

26. 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q에 대하여 $P \cap Q = P$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 항상 참인 명제인 것은?

① $p \to q$　② $p \to \sim q$　③ $q \to p$
④ $\sim p \to q$　⑤ $\sim q \to p$

해설

$P \cap Q = P \Leftrightarrow P \subset Q$ 이고, $P \subset Q$ 가 성립하면 $p \to q$가 참이 된다.

27. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

'$xy = yz = zx$ ' 는 '$xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$ ' 이므로 '$xy = yz = zx$ ' 의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

28. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.

③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.

④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.

⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

'역'의 대우인 '이'가 참인지 확인 한다.
① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x=2$
② x 가 3 의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x=5$
③ 4 의 배수가 아니면 2 의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6
④ $2x \leq x+3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

29. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to\ a \leq -1$

2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \to\ a \geq -5$

$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

30. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

① $r \Rightarrow p$ ② $\sim p \Rightarrow \sim s$ ③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$ ⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

31. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$p : xy = 0 \to x = 0$ 또는 $y = 0$
$q : |x| + |y| = 0 \to x = 0$ 그리고 $y = 0$
$r : x + y = 0 \to x = -y$
$\therefore q \to p$ $\{p$ 는 q이기위한필요조건$\}$
q 는 p이기위한충분조건
$q \to r$ $\{p$ 는 r이기위한필요조건$\}$
r 은 p 이기 위한 충분조건

32. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 <u>아닌</u> 것은?

① $p : ac = bc,\ q : a = b$

② $p : A \subset B,\ q : A - B = \varnothing$

③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0,\ q : ab < 0$

④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a,\ b$ 가 정수

⑤ $p : \triangle$ABC 는 정삼각형이다. $q : \triangle$ABC 의 세 내각의 크기가 같다.

해설

① $ac = bc$ $\underset{\overset{\circ}{\longleftarrow}}{\overset{\times}{\longrightarrow}}$ $a = b$ (반례 : $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

② $A \subset B$ $\underset{\overset{\circ}{\longleftarrow}}{\overset{\circ}{\longrightarrow}}$ $A - B = \varnothing$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

③ $a > 0$ 이고 $b < 0$ $\underset{\overset{\times}{\longleftarrow}}{\overset{\circ}{\longrightarrow}}$ $ab < 0$ (반례 : $a = -2,\ b = 2$)
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건

④ $a+b$ 가 정수 $\underset{\overset{\circ}{\longleftarrow}}{\overset{\times}{\longrightarrow}}$ $a,\ b$ 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

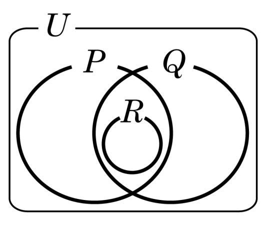
33. $x^2-ax+6\neq0$이 $x-2\neq0$이기 위한 충분조건일 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$p \rightarrow q$ (T) $\leftrightarrow$ $\sim q \rightarrow \sim p$ (T)
즉, 주어진 명제가 참이면 그 대우도 참
대우 : $x=2 \Rightarrow x^2-ax+6=0$ (T)
$\therefore\ a=5$

34. 전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 이 집합의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.

② $\sim r$ 는 $\sim p$ 또는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.

④ r 는 p 이고 q 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $\sim r$ 는 p 이고 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$R \subset (P \cup Q)$, $R \subset (P \cap Q)$ 이므로
① r는 p 또는 q 이기 위한 충분조건이다.
③ r는 p이고 q이기 위한 충분조건이다.

35. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \varnothing$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \varnothing$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

36. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : __________ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore p$는 q이기 위한 충분조건이다.

37. $x>0,\ y>0$일 때, $\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로

$\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)=16\cdot\frac{x}{y}+2xy+\frac{8}{xy}+\frac{y}{x}$에서

$16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\cdot\sqrt{16\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=8$

$2xy+\frac{8}{xy}\geq 2\cdot\sqrt{2xy\cdot\frac{8}{xy}}=8$

$\therefore 16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy+\frac{8}{xy}\geq 16$

38. 양의 실수 x, y에 대하여 $2x+y=1$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$x>0, y>0$ 이므로 $2x+y=1 \geq 2\sqrt{2xy}$

$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$

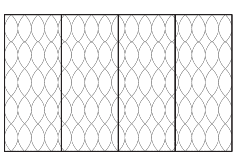
$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}}$ 이므로

$\frac{3}{xy}$ 이 최소가 되려면 xy가 최대가 되어야 하므로 $xy=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$

39. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$　② $70\mathrm{m}^2$　③ $80\mathrm{m}^2$　④ $90\mathrm{m}^2$　⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

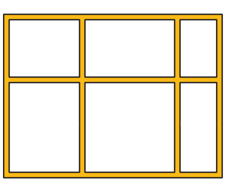
$\therefore\ ab \leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

$S=ab \leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

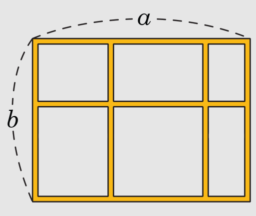
40. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$ ② $(1200, 40)$ ③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$ ⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because \ 3a + 4b = 240)$

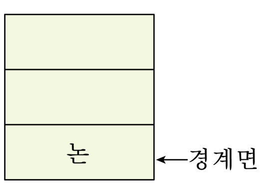
$\therefore \ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240$,

$\therefore \ a = 40$

41. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 $27\mathrm{m}^2$인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



① 70만원　② 71만원　③ 72만원
④ 73만원　⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x라 하면

가로의 길이는 $\dfrac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$3\times 2x+3\times\dfrac{27}{x}\times 2+\dfrac{27}{x}\times 2$

$=6x+\dfrac{162}{x}+\dfrac{54}{x}$

$=6x+\dfrac{216}{x}$

$\geq 2\sqrt{6x\cdot\dfrac{216}{x}}$

$=2\sqrt{1296}=2\times 36=72$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

42. $a > 1$일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{1}{a-1} > 0$

$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$

$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$

43. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답 : ＿＿＿＿ 가지

▷ 정답 : 8 가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

44. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a > 0$)
q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

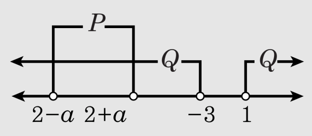
$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore$ $2-a < x < 2+a$ $\therefore$

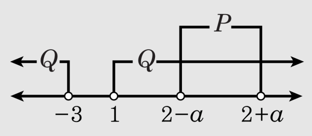
$P = \{x \mid 2-a < x < 2+a\}$, $Q = \{x \mid x < -3$ 또는 $x > 1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ $\cdots$ ㉡,

즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$

그런데 $a > 0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \leq 1$

㉠ : 

㉡ : 

$\therefore$ $\alpha = 0,\ \beta = 1$

$\therefore$ $\alpha+\beta = 1$