

1. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이상 } 18 \text{ 미만의 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X) = 4$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$B = \{12, 15\}$$

$$X \subset A, \quad B \subset X \text{ 이므로 } B \subset X \subset A$$

$$\{12, 15\} \subset X \subset \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15는 반드시 포함하고
원소의 개수가 4개인 집합이므로

$$\{10, 11, 12, 15\}, \{10, 12, 13, 15\},$$

$$\{10, 12, 14, 15\}, \{11, 12, 13, 15\},$$

$$\{11, 12, 14, 15\}, \{12, 13, 14, 15\} \text{의 } 6 \text{ 개이다.}$$

2. 원소의 개수가 3 인 집합 A 가 다음 조건을 만족한다.

$$(가) 5 \in A$$

$$(나) x \in A \text{ 이면 } \frac{1}{1-x} \in A$$

이 때 집합 A 의 모든 원소의 곱은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$$5 \in A \text{ 이므로 } \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4} \in A$$

$$\text{또 } \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \in A$$

$$\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \in A$$

$A = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5\right\}$ 에서 A 의 모든 원소의 곱은 $-\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times 5 = -1$ 이다.

3. 다음 보기 중에서 집합인 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 큰 컴퓨터들의 모임
- ㉡ 10보다 큰 자연수들의 모임
- ㉢ MP3를 많이 가진 학생들의 모임
- ㉣ 게임을 잘하는 학생들의 모임
- ㉤ 0과 1 사이에 있는 자연수의 모임
- ㉥ 우리 반에서 PMP를 가진 학생들의 모임

① ㉡, ㉣

② ㉤, ㉥

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉣, ㉤

⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ ‘큰’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉢ ‘많이’라는 단어는 명확한 기준이 없으므로 집합이 될 수 없다.
- ㉣ ‘잘하는’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉤ 0과 1 사이에는 자연수가 존재하지 않는다.
즉, 원소가 하나도 없는 집합을 의미한다. 그러므로 집합이다.

4. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 2의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 2의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 3, 5 로 만든 부분집합이므로 $2^2 = 4$ (개) 이다.

$$\therefore 32 - 4 = 28 \text{ (개)}$$

5. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$A \times C = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$\therefore n((A \times B) \cap (A \times C)) = 3$$

6. 집합 $A_n = \{x \mid 3n - 1 \leq x \leq 9n + 6, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ 이 성립하는 n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

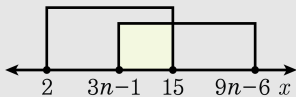
$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ 이므로

$A_1 \cap A_n \neq \emptyset$

$A_1 = \{x \mid 2 \leq x \leq 15\},$

$A_n = \{x \mid 3n - 1 \leq x \leq 9n + 6\}$

A_1, A_n 을 수직선 위에 나타낼 때 아래와 같은 꼴이어야 문제의 조건을 만족시킨다.



따라서, $3n - 1 \leq 15, n \leq \frac{16}{3} \therefore$ 최댓값은 $n = 5 (\because n \text{은 자연수})$

7. 두 집합 $A = \{2, 1, a+3, b\}$, $B = \{4, a, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

(i) $a+3=4$ 일 때, $a=1$

$$A = \{2, 1, 4, b\}$$

$$B = \{4, 1, b+1\}$$

$$b+1=2, b=1(\times)$$

(ii) $b=4$ 일 때,

$$A = \{2, 1, a+3, 4\}$$

$$B = \{4, a, 5\}$$

$$a+3=5, a=2(\bigcirc)$$

$$\therefore a+b=2+4=6$$

8. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.

수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 한다.

수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$50 = 35 + 25 - x$$

x 의 최솟값은 10명이다.

최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함될 때 성립한다.

그러므로 x 의 최댓값은 25명이다.

최솟값과 최댓값의 합은 35명이다.

9. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8, 12, 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

$$A \cap B = \{4, 8\}$$

$$A * B = \{2, 6\}$$

$$B \cap (A * B) = \emptyset$$

$$B * (A * B) = B = \{4, 8, 12, 16\}$$

10. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{2, 4, 6\}, A \cap B = \{2\}, B \cap A^c = \{1, 3, 5\}, A^c \cap B^c = \{7\}$ 일 때, A^c
 은?

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 5\}$

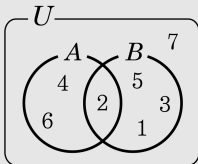
③ $\{1, 7\}$

④ $\{3, 5, 7\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

해설

$B \cap A^c = \{7\} = B - A$ 이므로
 $A^c = U - A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.



11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은?

① $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

② $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

③ $(A - B) \cup (A - B^c) = A$

④ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

해설

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

12. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $(A_{24} \cup A_{18}) \subset A_k$ 를 만족하는 k 의 최댓값은 ?

① 2

② 3

③ 6

④ 9

⑤ 18

해설

$A_{18} \subset A_k$ 이고 $A_{24} \subset A_k$ 이므로 k 는 18, 24의 공약수이고, 이 중에서 최대인 것은 6이다.

13. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

㉠ $A_5 \cap A_7 = \emptyset$

㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$

㉢ m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉤ $m = kn$ (k 는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

① ㉠, ㉡, ㉤

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉢, ㉤

해설

㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$

㉡ $A_4 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$

$A_6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 이므로

$A_4 \cup A_6 = \{4, 6, 8, 12, 16, \dots\} \neq A_4$

㉢ $A_m = \{m, 2m, \dots, nm, (n+1)m, \dots\}$

$A_n = \{n, 2n, \dots, mn, (m+1)n, \dots\}$

m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉤ $A_m = A_{kn} = \{kn, 2kn, 3kn, \dots\}$

$A_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$ 이므로

$A_m \subset A_n$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 라고 정의할 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?(단, $U \neq \emptyset$)

① $A \Delta U = U$

② $A \Delta B = B \Delta A$

③ $A \Delta \emptyset = A^c$

④ $A \Delta B = A^c \Delta B^c$

⑤ $A \Delta A^c = \emptyset$

해설

$A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 에 따라 $A \Delta U = A$

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 로 정의할 때, 다음 중에서 $(A\Delta B)\Delta A$ 와 같은 집합은?

① A

② B

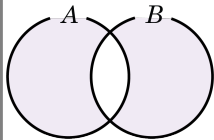
③ $A \cap B$

④ $A \cup B$

⑤ $A - B$

해설

$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $(A\Delta B)\Delta A = [(A\Delta B) - A] \cup [A - (A\Delta B)] = (B - A) \cup (A \cap B) = B$



16. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ 를 만족할 때, 다음 중 $(A \Delta B) \Delta A$ 와 같은 것은 ?

① A

② B

③ $A \cup B$

④ $A \cap B$

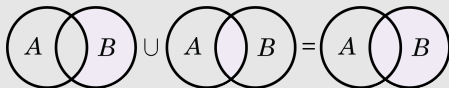
⑤ $A \cap B^c$

해설

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$$\therefore (A \Delta B) \Delta A = [(A \Delta B) - A] \cup [A - (A \Delta B)]$$

벤 다이어그램으로 설명하면 다음과 같다.



$$[(A \Delta B) - A] \cup [A - (A \Delta B)] = B$$

17. 어느 학급의 학생 35명 중에서 버스를 타고 통학하는 학생이 22명, 지하철을 타고 통학하는 학생이 18명, 버스와 지하철을 모두 타지 않는 학생이 10명이다. 버스와 지하철을 모두 이용하여 통학하는 학생 수는?

① 10명

② 13명

③ 15명

④ 18명

⑤ 20명

해설

학생의 전체의 집합을 U , 버스, 지하철로 통학하는 학생의 집합을 각각 A , B 라 하면 $n(U) = 35$, $n(A) = 22$, $n(B) = 18$,

$$n(A^c \cap B^c) = 10$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$n(A \cup B) = 35 - 10 = 25$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$n(A \cap B) = 22 + 18 - 25 = 15$$

18. 집합 $A = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{4\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \in A$

② $3 \notin A$

③ $4 \notin A$

④ $\{4\} \in A$

⑤ $\{2, 3\} \in A$

해설

집합 A 의 원소들은 $1, 2, 3, \{2, 3\}, \{4\}$ 이다.

옳은 것은 ①, ③, ④, ⑤ 이다.

② $3 \notin A$ 은 $3 \in A$ 가 맞다.

19. 집합 $A = \{(x, y) | ax - by = 12\}$ 에 대하여 $(6, 2) \in A$, $(-3, -2) \in A$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 12

② 16

③ 20

④ 26

⑤ 30

해설

$(6, 2) \in A$ 이므로 $x = 6, y = 2$

$$6a - 2b = 12, 3a - b = 6 \cdots \textcircled{㉠}$$

$(-3, -2) \in A$ 이므로 $x = -3, y = -2$

$$-3a + 2b = 12 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면 $b = 18$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 3a - 18 = 6 \therefore a = 8$$

$$\therefore a + b = 26$$

20. 다음 중 집합의 원소가 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{0\}$

② $\{x|x \text{는 } 4 \text{의 약수 중 홀수}\}$

③ $\{x|x \text{는 } 3 \times x = 0 \text{인 자연수}\}$

④ $\{x|x \text{는 } 11 < x < 12 \text{인 자연수}\}$

⑤ $\{x|x \text{는 } x \leq 1 \text{인 자연수}\}$

해설

① $\{0\}$

② $\{1\}$

⑤ $\{1\}$

21. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\emptyset) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x \text{는 } 40 \text{ 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x \text{는 } 2 < x < 4 \text{인 홀수}\}) = 1$

해설

① $n(\emptyset) = 0, n(\{0\}) = 1$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 3 - 2 = 1$

③ $n(\{4\}) = 1$

④ $n(\{2, 4, 6, \dots, 40\}) = 20$

⑤ $n(\{3\}) = 1$

22. 집합 $A = \{\phi, 1, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 $P(A) = \{X | X \subset A\}$ 라 정의 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

$$\textcircled{\text{㉠}} \phi \in P(A)$$

$$\textcircled{\text{㉡}} A \subset P(A)$$

$$\textcircled{\text{㉢}} A \in P(A)$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \{1\} \subset P(A)$$

$$\textcircled{\text{㉥}} \{1, 2\} \in P(A)$$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$P(A)$ 는 A 의 부분집합들을 원소로 하는 집합이다.

$$\textcircled{\text{㉡}} A \in P(A) \quad \textcircled{\text{㉤}} \{1\} \in P(A) \quad \textcircled{\text{㉥}} \{\{1, 2\}\} \in P(A)$$

$\therefore \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 만 옳다.

23. 집합 A 의 부분집합 중에서 원소 6, 7 을 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 8 개일 때, 집합 A 의 원소의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$$8 = 2^3$$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$$n - 2 = 3, \quad n = 5, \quad n(A) = 5$$

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?(단, $U \neq \emptyset$)

① $A \cup B = B$

② $A \cap B = A$

③ $(A \cap B)^c = B^c$

④ $B^c \subset A^c$

⑤ $A - B = \emptyset$

해설

③ $A \subset B$ 이면 A 와 B 의 교집합이 A 이므로 $A^c = B^c$ 라는 식으로 되는데 $A \subset B$ 인 경우 항상 성립하지는 않는다.

25. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (정답 2개)

① $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 0$

② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$

④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \emptyset$

⑤ $n(A) = 0$, $n(B) \neq 0$ 이면 $B \subset A$ 이다.

해설

① $A = \{\emptyset\}$ 이면 집합 A 의 원소가 $\emptyset$ 이므로, $n(A) = 1$ 이다.

③ 예를 들어 $A = \{2, 3, 5\}$ 이고, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만, $A \not\subset B$ 이다.

⑤ $A = \emptyset$ 이므로, 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset$ 하나 밖에 없다.

26. 두 조건 p, q 의 진리집합 P, Q 에 대하여 $P \cap Q = P$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 항상 참인 명제인 것은?

① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow \sim q$

③ $q \rightarrow p$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $\sim q \rightarrow p$

해설

$P \cap Q = P \Leftrightarrow P \subset Q$ 이고, $P \subset Q$ 가 성립하면 $p \rightarrow q$ 가 참이 된다.

27. 명제 ‘모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.’를 부정한 것은?

- ① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.
- ② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.
- ⑤ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

‘ $xy = yz = zx$ ’는 ‘ $xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$ ’이므로
‘ $xy = yz = zx$ ’의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$
이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여
 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

28. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

- ① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.
- ② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.
- ③ 4의 배수는 2의 배수이다.
- ④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.
- ⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

‘역’의 대우인 ‘이’가 참인지 확인 한다.

- ① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례: $x = 2$
- ② x 가 3의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례: $x = 5$
- ③ 4의 배수가 아니면 2의 배수가 아니다 (거짓) 반례: 6
- ④ $2x \leq x+3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
- ⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

29. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 a 의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7

② -6

③ -5

④ -4

⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$ 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0,$$

$x = -3, 1$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

1) $x = -3 : 9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$

2) $x = 1 : 1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$

$$\therefore -5 \leq a \leq -1$$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

30. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

① $r \Rightarrow p$

② $\sim p \Rightarrow \sim s$

③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$

⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

31. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$$p : xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ 또는 } y = 0$$

$$q : |x| + |y| = 0 \rightarrow x = 0 \text{ 그리고 } y = 0$$

$$r : x + y = 0 \rightarrow x = -y$$

$$\therefore q \rightarrow p \{p \text{ 는 } q \text{ 이기 위한 필요조건}\}$$

$$q \text{ 는 } p \text{ 이기 위한 충분조건}$$

$$q \rightarrow r \{p \text{ 는 } r \text{ 이기 위한 필요조건}\}$$

$$r \text{ 은 } p \text{ 이기 위한 충분조건}$$

32. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $p : ac = bc, q : a = b$

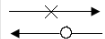
② $p : A \subset B, q : A - B = \emptyset$

③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0, q : ab < 0$

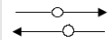
④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a, b$ 가 정수

⑤ $p : \triangle ABC$ 는 정삼각형이다. $q : \triangle ABC$ 의 세 내각의 크기가 같다.

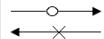
해설

① $ac = bc$  $a = b$ (반례 : $a = 1, b = 2, c = 0$)

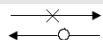
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

② $A \subset B$  $A - B = \emptyset$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

③ $a > 0$ 이고 $b < 0$  $ab < 0$ (반례 : $a = -2, b = 2$)

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건

④ $a + b$ 가 정수  a, b 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$)

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

33. $x^2 - ax + 6 \neq 0$ 이 $x - 2 \neq 0$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

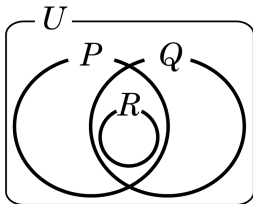
$$p \rightarrow q \text{ (T)} \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p \text{ (T)}$$

즉, 주어진 명제가 참이면 그 대우도 참

$$\text{대우 : } x = 2 \Rightarrow x^2 - ax + 6 = 0 \text{ (T)}$$

$$\therefore a = 5$$

34. 전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 이 집합의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



- ① r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ② $\sim r$ 는 $\sim p$ 또는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.
- ③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.
- ④ r 는 p 이고 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤ $\sim r$ 는 p 이고 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$R \subset (P \cup Q), R \subset (P \cap Q)$ 이므로

- ① r 는 p 또는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.

35. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \emptyset$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

36. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.



답 :

조건



정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$

q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$

s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$

q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$

따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$

$\therefore p \Rightarrow q$

그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

37. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

38. 양의 실수 x, y 에 대하여 $2x+y=1$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$

② $3\sqrt{6}$

③ $4\sqrt{6}$

④ $5\sqrt{6}$

⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$$x > 0, y > 0 \text{ 이므로 } 2x + y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

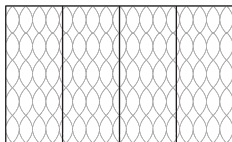
$$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{xy} \text{ 이 최소가 되려면 } xy \text{가 최대가 되어야 하므로 } xy = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

39. 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

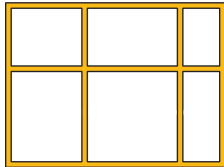
$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

40. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① (600, 40)

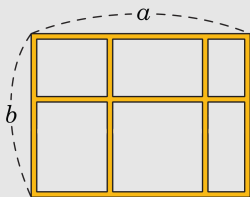
② (1200, 40)

③ (600, 30)

④ (1200, 30)

⑤ (450, 60)

해설



$$3a + 4b = 240$$

$$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$$

$$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because 3a + 4b = 240)$$

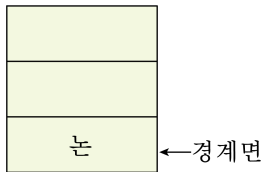
$$\therefore 1200 \geq ab$$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$$3a + 4b = 6a = 240,$$

$$\therefore a = 40$$

41. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m^2 인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원
④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x 라 하면

가로 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

42. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

43. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$$

44. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : |x - 2| < a \text{ (단, } a > 0 \text{)}$$

$$q : x < -3 \text{ 또는 } x > 1$$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$|x - 2| < a$ 에서 $-a < x - 2 < a \therefore 2 - a < x < 2 + a \therefore$

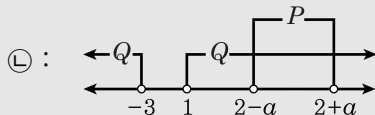
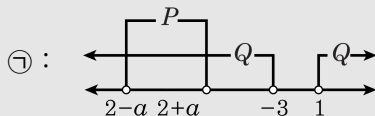
$P = \{x | 2 - a < x < 2 + a\}$, $Q = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 1\}$

따라서 $P \subset Q$ 가 되려면 $2 + a \leq -3 \dots \textcircled{7}$ 또는 $2 - a \geq 1 \dots$

$\textcircled{L}$,

즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$

그런데 $a > 0$ 이므로 구하는 a 의 범위는 $0 < a \leq 1$



$$\therefore \alpha = 0, \beta = 1$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1$$