1. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$ 에서

$\log_8 x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

2. $(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$의 값은?

① 4　② 6　③ 12

④ $4\log_2 3$　⑤ $6\log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$

$= \left(\log_2 3 + 2\dfrac{\log_2 7}{\log_2 4}\right) \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}}$

$= \left(\log_2 3 + 2\dfrac{\log_2 7}{\log_2 2^2}\right) \cdot \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}}$

$= \left(\log_2 3 + 2\dfrac{\log_2 7}{2\log_2 2}\right) \cdot \dfrac{3\log_2 2}{\dfrac{1}{4}\log_2 21}$

$= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \dfrac{12}{\log_2 21}$

$= \log_2 21 \cdot \dfrac{12}{\log_2 21} = 12$

3. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{2a+b}{b-a}$ ③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$
④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ b = \log_5 3$

$\log_6 72 = \dfrac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{3a+2b}{a+b}$

4. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
$= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

5. $\log(31.4\times A)=1.0471$ 일 때, 양수 A 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구한 것은?

수	0	1	2	3	4	5
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5326	.5250
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378
3.5	.5441	.5435	.5465	.5478	.5490	.5502

① 0.3020　　② 0.355　　③ 1.35

④ 2.30　　⑤ 2.33

해설

$\log(31.4\times A)=1.0471$ 에서

$\log 31.4+\log A=1.0471$

$\log A=1.0471-\log 31.4$

$=1.0471-(1+\log 3.14)$

$=1.0471-(1+0.4969)$($\therefore$ 로그표에서 $\log 3.14=0.4969$)

$=-0.4498$

$=-1+0.5502$

그런데 주어진 로그표에서 $\log 3.55=0.5502$ 이므로 $A=0.355$ 이다.

6. $\log 80$ 의 정수 부분을 n, 소수 부분을 a 라 할 때, $10^n + 10^a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\log 80 = \log(10 \times 8) = 1 + \log 8$ 에서
$0 < \log 8 < 1$ 이므로
$\log 80$ 의 정수 부분은 1 이고 소수 부분은 $\log 8$ 이다.
즉 $n = 1, a = \log 8$ 이므로
$10^n + 10^a = 10 + 10^{\log 8} = 10 + 8 = 18$

7. $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34, 0.969

해설

$\log 3140^{10} = 10 \log 3140$
$= 10 \log(3.14 \times 1000)$
$= 10(\log 3.14 + \log 1000)$
$= 10(0.4969 + 3)$
$= 10 \times 3.4969 = 34.969$

8. $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 일 때, $2^a + 2^{-a}$ 의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}+1$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3}+1$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

로그의 정의에 의하여

$4^a = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^{2a} = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{2} - 1$

$$2^{-a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$\Leftrightarrow 2^{-a} = \sqrt{2} + 1$

$2^a + 2^{-a} = 2\sqrt{2}$

9. $\log_a(-a^2+5a+6)$ 의 값이 존재하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\log_a(-a^2+5a+6)$ 의 값이 존재하기 위해서는
(i) 밑 조건에 의하여
$a > 0,\ a \neq 1 \cdots$ ㉠
(ii) 진수 조건에 의하여
$-a^2+5a+6 > 0,\ a^2-5a-6 < 0$
$(a+1)(a-6) < 0$
$\therefore -1 < a < 6 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5 의 4 개다.

10. $\log_2 x+\log_2 y=\dfrac{3}{2}$을 만족하는 두 양수$x$, y에 대하여, $x+2y$의 최솟값을 m이라 하고 그때의 x, y의 값을 각각 a, b라 하자. 이때, $\dfrac{am}{b}$의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$ ② $2^{\frac{3}{2}}$ ③ $2^{\frac{9}{4}}$ ④ $2^{\frac{5}{2}}$ ⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$\log_2 x+\log_x y=\log_2 xy=\dfrac{3}{2}\quad\therefore xy=2^{\frac{3}{2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y\geq 2\sqrt{2xy}=2\sqrt{2\cdot 2^{\frac{3}{2}}}=2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}}=2\cdot 2^{\frac{5}{4}}=2^{\frac{9}{4}}$

따라서 $x+2y$의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$이다.

(단, 등호는 $x=2^{\frac{5}{4}}, y=2^{\frac{1}{4}}$일 때 성립한다.)

$a=2^{\frac{5}{4}}, b=2^{\frac{1}{4}}, m=2^{\frac{9}{4}}$

$\dfrac{am}{b}=2^{(\frac{5}{4}+\frac{9}{4})-\frac{1}{4}}=2^{\frac{13}{4}}$

11. $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$라 할 때, $\log_{24}\sqrt{18}$을 a, b를 사용하여 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+2b}{2(a+3b)}$ ② $\dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$ ③ $\dfrac{2a+b}{2(3a+b)}$
④ $\dfrac{2(a+2b)}{3a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(2a+b)}{a+3b}$

해설

$\log_{24}\sqrt{18} = \dfrac{\log_5\sqrt{18}}{\log_5 24}$에서

$\log_5\sqrt{18} = \dfrac{1}{2}\log_5 18 = \dfrac{1}{2}\log_5(2\cdot 3^2)$

$= \dfrac{1}{2}(\log_5 2 + 2\log_5 3) = \dfrac{1}{2}(a+2b)$

$\log_5 24 = \log_5(2^3\cdot 3) = 3\log_5 2 + \log_5 3 = 3a+b$

$\therefore \log_{24}\sqrt{18} = \dfrac{\log_5\sqrt{18}}{\log_5 24} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$

12. $2^a = 20^b = 10^{10}$ 일 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{10}$

해설

$a = \frac{10}{\log 2},\ b = \frac{10}{1 + \log_2}$

$\therefore\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\log 2}{10} - \frac{1 + \log 2}{10} = -\frac{1}{10}$

13. 1보다 큰 정수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$일 때, $\log_c p$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ 3　④ 6　⑤ 9

해설

주어진 식에서 $\log_p a = \frac{1}{12},\ \log_p b = \frac{1}{4},\ \log_p abc = \frac{1}{2}$

$\log_c p = x$라 하면 $\log_p c = \frac{1}{x}$이고,

$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c$이므로

$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x},\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

$\therefore\ x = 6$

$\therefore\ \log_c p = 6$

14. $A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$, $B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$ 일 때, AB의 값은?

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$

$=(\log_3 3^3)(\log_4 3^3+\log_{2^{-1}}3^{-1})$

$=(2\log_3 3^3)(\frac{2}{2}\log_2 3+\frac{-1}{-1}\log_2 3)$

$=2(\log_2 3+\log_2 3)=2\cdot\log_2 3=4\log_2 3$

$B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$

$=(\log_{3^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^2}5)(\log_5 2^6+\log_{5^2}2^3)$

$=(2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5)(6\log_5 2+\frac{3}{2}\log_5 2)$

$=\frac{5}{2}\log_3 5\cdot\frac{15}{2}\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}5}$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{75}{4}\log_3 2$

$\therefore\ AB=4\log_2 3\cdot\frac{75}{4}\log_3 2$

$=4\cdot\frac{75}{4}\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=75$

15. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.5$ 의 값을 계산하면?

① 0.0880 ② 0.0885 ③ 0.1660
④ 0.1761 ⑤ 0.1777

해설
$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$
$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$
$= 0.1761$

16. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.138} = \frac{1}{3}\log 0.138 = \frac{1}{3}\log(1.38 \times 10^{-1})$$ 따 라 서

$$= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1)$$

$$= -0.2867 = -1 + 0.7133$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133 이다.

17. $\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

(i) $n = 1,\ 2$ 일 때, $0 \le \log_3 n < 1$이므로 $[\log_3 n] = 0$

(ii) $3 \le n < 9$ 일 때, $1 \le \log_3 n < 2$이므로 $[\log_3 n] = 1$

(iii) $9 \le n < 27$ 일 때, $2 \le \log_3 n < 3$이므로 $[\log_3 n] = 2$

(iv) $27 \le n < 81$ 일 때, $3 \le \log_3 n < 4$이므로 $[\log_3 n] = 3$

(v) $81 \le n < 100$ 일 때, $4 \le \log_3 n < 5$이므로 $[\log_3 n] = 4$

(i) ~ (v)로부터

$\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n] = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 20 = 284$

18. 1이 아닌 세 자연수 x, y, z가 다음 두 식을 만족한다.

㉠ $\log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{5}{3}$
㉡ $\log_y z \log_z x + \log_z x \log_x y + \log_x y \log_y z = \frac{5}{3}$

이때, $(\log_y z)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{20}{9}$　② $-\frac{11}{9}$　③ $-\frac{5}{9}$　④ $-\frac{1}{9}$　⑤ 1

해설

$\log_y z = A, \log_z x = B, \log_x y = C$ 라 하면

$\log_z y = \frac{1}{A}, \log_x z = \frac{1}{B}, \log_y x = \frac{1}{C}$ 이므로

$A + B + C = \frac{5}{3}$ 에서 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{AB + BC + CA}{ABC}$

이므로 $AB + BC + CA = \frac{5}{3}$

$\therefore\ (\log_z y)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$

$= A^2 + B^2 + C^2$

$= (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA)$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{5}{9}$

19. $ab > 0$, $a^2 + 2ab - 15b^2 = 0$일 때, $\log_5(a^2 + 4ab - 17b^2) - \log_5(2a^2 - 3ab + 11b^2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$a^2 + 2ab - 15b^2 = 0$에서 $(a - 3b)(a + 5b) = 0$

$\therefore\ a = 3b$ 또는 $a = -5b$

그런데 $ab > 0$이므로 $a = 3b$이다.

$a = 3b$를 주어진 식에 대입하면

$$\log_5(a^2 + 4ab - 17b^2) - \log_5(2a^2 - 3ab + 11b^2)$$
$$= \log_5(9b^2 + 12b^2 - 17b^2) - \log_5(18b^2 - 9b^2 + 11b^2)$$
$$= \log_5 4b^2 - \log_5 20b^2 = \log_5 \frac{4b^2}{20b^2}$$
$$= \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$$

20. $\log 43.1 = 1.3645$ 일 때,
$a = \log 4310$, $\log b = -1.3655$ 라 하면, $a + 100b$ 의 값은?

① 2.9745 ② 4.0665 ③ 7.9445
④ 3.1932 ⑤ 5.5913

해설

$a = \log 4310 = \log 43.1 \times 100$
$= \log 43.1 + 2 = 3.6345$
$\log b = -1.3655 = -3 + 1.6345$
$= \log_{10} 10^{-3} + \log 43.1$
$= \log 0.0431$
$b = 0.0431$
$a + 100b = 3.6345 + 4.31$
$= 7.9445$

21. $\triangle$ABC의 세 변 a, b, c에 대하여
$\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2\log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$와 같은 관계가 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가? (단,$a > b, c \neq 1$)

① 정삼각형

② $b = c$인 이등변삼각형

③ $a = c$인 이등변 삼각형

④ a를 빗변으로 하는 직각삼각형

⑤ b를 빗변으로 하는 직각삼각형

해설

밑의 변환 공식을 이용하면

$$\frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)}$$

$$= \frac{2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)}$$

양변에 $\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)$를 곱하면

$$\log_c(a-b) + \log_c(a+b) = 2\log_c c$$

$$\log_c(a-b)(a+b) = \log_c c^2$$

로그의 정의에 의해

$$(a-b)(a+b) = c^2, a^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

22. X에 대한 이차방정식 $X^2-5X+5=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$, $a=\alpha-\beta$라 할 때, $\log_a\alpha+\log_a\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\alpha+\beta=5 \quad \alpha\beta=5$

$a=\alpha-\beta=\sqrt{5^2-4\cdot 5}=\sqrt{5}$

$\log_a\alpha+\log_a\beta=\log_a\alpha\beta=\log_{\sqrt{5}}5=2$

23. 다음은 2.3^9 의 값을 구하는 과정이다.

$\log 2.3^9 = 9\log 2.3 = $ (㉠)
$\log 1.8 = 0.2553$ 이므로
$\log 2.3^9 = 3 + 0.2553$
$= 3 + \log 1.8$
$= \log($㉡$)$
$\therefore 2.3^9 = $ (㉡)

위의 과정에서 (㉠), (㉡) 에 알맞은 수를 차례로 나열한 것은? (단, $\log 1.8 = 0.2553,\ \log 2.3 = 0.3617$)

① $3.2553, 1800$　② $3.2553, 180$　③ $4.2553, 2800$
④ $4.52553, 280$　⑤ $5.2553, 18000$

해설

$\log 2.3 = 0.3617$ 이므로
$\log 2.3^9 = 9\log 2.3 = 9 \times 0.3617 = 3.2553$
$\log 1.8 = 0.2553$ 이므로
$\log 2.3^9 = 3 + 0.2553$
$= 3 + \log 1.8 = \log 10^3 + \log 1.8$
$= \log(10^3 + 1.8) = \log 1800$
따라서 $2.3^9 = 1800$

24. 1보다 큰 양수 a의 상용로그의 정수 부분을 x라 할 때, 다음 식이 성립한다.

$$-x + \log a = \frac{x^2 - 2x - 2}{6}$$

이때, $6\log a$의 값은?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

$-x + \log a$의 값이 $\log a$의 소수 부분이므로

$0 \le \frac{x^2 - 2x - 2}{6} < 1$

$0 \le \frac{x^2 - 2x - 2}{6}$에서 $x^2 - 2x - 2 \ge 0$

$\therefore\ x \ge 1 + \sqrt{3}\ (\because x > 0) \cdots$ ㉠

$\frac{x^2 - 2x - 2}{6} < 1$에서 $x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore\ -2 < x < 4\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $1 + \sqrt{3} \le x < 4$

그런데 x는 정수이므로 $x = 3$

$\therefore\ \frac{x^2 - 2x - 2}{6} = \frac{1}{6}$

$-x + \log a = \frac{1}{6}$이므로 $\log a = \frac{1}{6} + 3 = \frac{19}{6}$

$\therefore\ 6\log a = 6 \times \frac{19}{6} = 19$

25. 어떤 자연수 A에 대하여 $\log A = 5.7016$일 때, 소수 $\frac{1}{A}$은 소수점 아래 $\square$번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나오며, 그 숫자는 $\square$이다. 이때, $\square$ 안에 알맞은 수를 차례로 적은 것은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5, 1　② 5, 2　③ 6, 1　④ 6, 2　⑤ 6, 3

해설

$$\log \frac{1}{A} = -\log A = -5.7016 = -6 + 0.2984$$
$$= \bar{6}.2984$$
$$\log \frac{1}{A} + 6 = 0.2984$$
$$\log \frac{1}{A} + \log 10^6 = 0.2984$$
$$\log \frac{10^6}{A} = 0.2984$$

또, $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.3010$이므로

$$\log 1 < \log \frac{10^6}{A} < \log 2 \quad \therefore 1 < \frac{10^6}{A} < 2$$
$$\therefore 1 \times 10^{-6} < \frac{1}{A} < 2 \times 10^{-6}$$
$$\therefore \frac{1}{A} = 0.000001\times\times\times$$

따라서, $\frac{1}{A}$은 소수점 아래 6번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나오며, 그 숫자는 1이다.

26. $\log x$의 정수 부분이 3이고, $\log x$의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같을 때, x의 값은?(단, $\log x$의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $10^{\frac{3}{2}}$ ② $10^{\frac{5}{2}}$ ③ $10^{\frac{10}{2}}$ ④ $10^{\frac{7}{2}}$ ⑤ $10^{\frac{11}{3}}$

해설

$\log x$의 정수 부분이 3이므로 $3 \le \log x < 4 \cdots$ ㉠

$\log x$의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로 $\log x - \log \frac{1}{x} =$(정수) 이어야 한다.

$\log x - \log \frac{1}{x} = \log x + \log x = 2\log x$(정수)

㉠에 의하여 $6 \le 2\log x < 8$이고, 이 범위를 만족하는 정수는 $6, 7$이다.

(i) $2\log x = 6$일 때, $\log x = 3$

(i) $2\log x = 7$일 때, $\log x = \frac{7}{2}$

그런데 $\log x$의 소수 부분은 0이 아니므로

$\log x = \frac{7}{2}$

$\therefore\ x = 10^{\frac{7}{2}}$

27. $1 < x < 10$ 일 때, $\log\sqrt{x}$ 와 $\log x^2$ 의 소수 부분과 합이 1 이 되도록 하는 모든 x 의 값들의 곱은?

① $10^{\frac{1}{5}}$　② $10^{\frac{1}{2}}$　③ $10^{\frac{2}{3}}$　④ $10^{\frac{3}{4}}$　⑤ $10^{\frac{6}{5}}$

해설

$1 < x < 10$ 이므로 $0 < \log x < 1$ 이다.
$\log x$ 의 정수 부분이 0 이므로 $\log x = \alpha (0 < \alpha < 1)$ 라 하자.

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x = 2\alpha$

따라서 $\log\sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{2}\alpha$ 이다.

$\log x^2 = 2\log x = 2\alpha$

(i) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때,

$0 < 2\alpha < 1$ 이므로 $\log x^2$ 의 소수 부분은 2α 이다.
$\log\sqrt{x}$ 와 $\log x^2$ 의 소수 부분의 합이 1 이므로

$\frac{1}{2}\alpha + 2\alpha = 1,\ \frac{5}{2}\alpha = 1 \quad \therefore\ \alpha = \frac{2}{5}$

즉, $\log x = \frac{2}{5}$ 이므로 $x = 10^{\frac{2}{5}}$

(ii) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때

$1 \le 2\alpha < 2$ 이므로 $\log x^2$ 의 소수 부분은 $2\alpha - 1$ 이다.
$\log\sqrt{x}$ 와 $\log x^2$ 의 소수 부분의 합이 1 이므로

$\frac{1}{2}\alpha + (2\alpha - 1) = 1,\ \frac{5}{2}\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = \frac{4}{5}$

즉, $\log x = \frac{4}{5}$ 이므로 $x = 10^{\frac{4}{5}}$

(i), (ii) 에서 구하는 x 의 값들의 곱은
$10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{\frac{4}{5}} = 10^{\frac{6}{5}}$

28. $1 < a < 10$ 인 a 에 대하여 $\log_{10} a^3$ 의 소수 부분과 $\log_{10} \sqrt{a}$ 의 소수 부분의 합이 1 이 될 때, 모든 a 의 값의 곱을 $10^{\frac{q}{p}}$ 이라 하자. 이때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$1 < a < 10$ 에서 $\log_{10} a = \alpha(0 < \alpha < 1)$ 이다.
$\log_{10} a^3$ 과 $\log_{10} \sqrt{a}$ 의 소수 부분의 합이 1 이므로
$3\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \frac{7}{2}\alpha$ 는 정수이다.
$\alpha = \frac{2}{7}$, $\alpha = \frac{4}{7}$, $\alpha = \frac{6}{7}$ 이므로
a 의 곱은 $10^{\frac{2}{7}} \cdot 10^{\frac{4}{7}} \cdot 10^{\frac{6}{7}} = 10^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}} = 10^{\frac{12}{7}}$
$\therefore\ 7 + 12 = 19$

29. 어떤 교육심리학자는 아무 의미가 없는 음절(예를 들면 “강릉동룽”)을 학생에게 들려주고 시간이 흐른 후 그 음절을 다시 기억하게 하는 실험을 하였다. 이 실험에 참가한 학생 1000명 중 t분 후에 정확하게 음절을 기억한 학생의 비율을 $p\%$라 할 때, $p = 92 - 28\log_5 t\,(t \geq 1)$가 성립하였다고 한다. 이 실험에 참가한 학생 1000명 중 10분 후에 정확하게 음절을 기억하는 학생 수를 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 520

해설

$p = 92 - 28\log_5 t$에 $t = 10$을 대입하면

$p = 92 - 28\log_5 10$

$= 92 - 28 \times \dfrac{1}{\log 5}$

$= 92 - 28 \times \dfrac{1}{1 - \log 2}$

$= 92 - 28 \times \dfrac{1}{1 - 0.3} = 52(\%)$

따라서 구하는 학생 수는 $1000 \times 0.52 = 520$(명)이다.

30. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A에서 B로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F는 $\mathrm{F} = 10\log\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)$ (데시벨)로 정의한다. 전파감쇄비가 -7(데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}} = 2$로 계산한다.)

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$-7 = 10\log\frac{B}{A}$

$-\frac{7}{10} = \log\frac{B}{A}$

$\frac{B}{A} = 10^{-\frac{7}{10}} = 10^{-1} \times 10^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

31. 어떤 폐수 처리 기계를 통과하면 오염 물질의 10% 가 제거된다고 한다. 폐수를 이 기계에 10 번 반복하여 통과시킬 때, 남아있는 오염 물질의 양은 처음의 몇 % 인지 소수 첫째 자리에서 반올림하여 정수로 구하여라.
(단, $\log 3.483 = 0.5420,\ \log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

처음 오염 물질의 양을 a라 하면
1 번 통과 후 남아있는 오염물질의 양$= 0.9$
2 번 통과 후 남아있는 오염물질의 양$= 0.9^2 a$
$\vdots$
10 번 통과 후 남아있는 오염물질의 양$= 0.9^{10} a$

$$\begin{aligned}\log 0.9^{10} &= 10 \times \log 0.9 \\ &= 10 \times (\log 3^2 - 1) \\ &= 10 \times (2 \times 0.4771 - 1) \\ &= -0.458\end{aligned}$$

-0.458
$= -1 + 0.542$
$= \log 10^{-1} + \log 3.483$
$= \log 0.3483 = \log 0.9^{10}$
$\therefore 0.9^{10} = 0.3483$ 이므로
처음의 약 35%

32. 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$　　ㄴ $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

ㄷ $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 밑의 조건에서

$$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$$

진수의 조건에서 $a^2+1\geq 1$

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ (반례) $a=0$일 때, 밑 $2|a|+1=1$ 이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ (반례) $a=1$일 때, 진수 $a^2-2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ이다.

33. 다음은 $\log_m n$ 이 무리수임을 이용하여 $\log_{m^2} m^3 n$ 도 무리수임을 증명한 것이다.

> $\log_m n = s$(s는 [(가)])로 놓고
> $\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.
> $\log_{m^2} m^3 n = \dfrac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \dfrac{1}{2}$[(나)]
> 이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
> $2t - 3 = s$
> 이것은 [(다)]가 되어 모순이다.
> 따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 유리수, $2s$, (유리수)=(무리수)

② 유리수, $1 + 2s$, (짝수)=(홀수)

③ 유리수, $2 + s$, (유리수)=(무리수)

④ 무리수, $2s$, (짝수)=(홀수)

⑤ 무리수, $3 + s$, (유리수)=(무리수)

해설

$\log_m n = s$(s는 [무리수])로 놓고
$\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.
$\log_{m^2} m^3 n = \dfrac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \dfrac{1}{2}[(3 + s)]$
이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
$2t - 3 = s$
이것은 [(유리수)=(무리수)]가 되어 모순이다.
따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

34. $\alpha^3 = 2 + \sqrt{5},\ b^3 = 2 - \sqrt{5}$ 일 때, $\log_2(a^2+b^2)$ 의 정수 부분을 α, 소수 부분을 β 라 하자. 이때, $10^\alpha \times 2^\beta$ 의 값은?

① 10　② 13　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$\alpha^3 = 2 + \sqrt{5},\ b^3 = 2 - \sqrt{5}$ 이므로
$a^3 + b^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$
$a^3 b^3 = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = 4 - 5 = -1$
$\therefore\ ab = -1 \cdots$ ㉠
이때, $a+b = x$ 로 놓으면 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ 이므로
$x^3 = 4 - 3x\ \ \therefore\ x^3 + 3x - 4 = p(x)$ 로 놓으면
$P(1) = 0$ 이므로
$(x-1)(x^2+x+4) = 0$
$\therefore\ x = 1(\because\ x^2+x+4 > 0)$
$\therefore\ a + b = 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 + 2 = 3$
따라서, $\log_2(a^2+b^2) = \log_2 3$ 이고,
$1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2$ 이므로
$\log_2(a^2+b^2)$ 의 정수부분 $\alpha = 1$,
소수부분 $\beta = \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2}$
$\therefore\ 10^\alpha \times 2^\beta = 10^1 \times 2^{\log_2 \frac{3}{2}} = 10 \times \frac{3}{2} = 15$

35. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $n \le \log_a b < n+1$(n은 정수)이 성립할 때, $f(a,\ b) = n$으로 정의한다. 옳은 내용을 보기에서 고른 것은?

보기

ㄱ $f(2,\ 9) = 4$ 이다.

ㄴ $f(a,\ b) = 2$ 이면 $f(b,\ a) = 0$ 이다.

ㄷ $f(a,\ b) = -2$ 이면 $f(b,\ a) = -1$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $3 < \log_2 9 < 4$ 이므로 $f(2,\ 9) = 3$ (거짓)

ㄴ $f(a, b) = 2$ 이면 $2 \le \log_a b < 3$

$\frac{1}{3} < \log_b a \le \frac{1}{2} \quad \therefore f(b,\ a) = 0$ (참)

ㄷ $f(a,\ b) = -2$ 이면 $-2 \le \log_a b < -1$

$-1 < \log_b a \le -\frac{1}{2} \quad \therefore f(b,\ a) = -1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

36. $A = 10^{\log_{10} 3}$, $B = \dfrac{1}{\log_{10} 3} + \dfrac{1}{\log_3 10}$, $C = \dfrac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

해설

$A = 10^{\log_{10} 3} = 3$

$B = \dfrac{1}{\log_{10} 3} + \dfrac{1}{\log_3 10}$

$= \dfrac{1}{\log_{10} 3} + \log_{10} 3 > 2\sqrt{\dfrac{1}{\log_{10} 3} \cdot \log_{10} 3} = 2$

$C = \dfrac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10}$ 에서

$\log_{10} 3 + \log_3 10 > 2\sqrt{\log_{10} 3 \cdot \log_3 10} = 2$ 이므로

$C = \dfrac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10} < \dfrac{3}{2}$

$\therefore C < B < A$

37. 자연수 $x,\ y$에 대하여 $\log x,\ \log y$의 정수 부분을 각각 $m,\ n$이라 하자. $m^2+n^2=4$를 만족하는 $x,\ y$에 대하여 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하면?

① 16200 ② 16400 ③ 16600
④ 17010 ⑤ 24300

해설

$x,\ y$가 자연수이므로 $m \geq 0,\ n \geq 0$인 정수이고, $m^2+n^2=4$인 경우는 다음과 같다.

(i) $m=2,\ n=0$일 때
$2 \leq \log x < 3$이므로 $100 \leq x < 1000$
$0 \leq \log y < 1$이므로 $1 \leq y < 10$
따라서, 순서쌍 (x, y)의 개수는 $900 \times 9 = 8100$

(ii) $n=0,\ m=2$일 때
(i)의 경우와 순서만 바뀌므로 이때의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수도 8100이다.

(i), (ii)에 의하여 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$8100+8100=16200$

38. x, y가 각각 2자리, 3자리의 자연수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ xy는 4자리 또는 5자리의 자연수이다.

㉡ $y = 10x$이면 $\log_{10} x$와 $\log_{10} y$의 소수 부분은 같다.

㉢ $\frac{1}{x}$은 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\log_{10} x = 1 + \alpha (0 \le \alpha < 1)$
$\log_{10} y = 2 + \beta (0 \le \beta < 1)$
㉠ $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y = 3 + \alpha + \beta$이고 여기에서 $0 \le \alpha + \beta < 2$이므로 정수 부분은 3 또는 4이다.
$\therefore$ xy는 4자리 또는 5자리 자연수이다.　(참)
㉡ $\log_{10} y = \log_{10} 10x = 1 + \log_{10} x = 2 + \alpha$　(참)
㉢ (반례) $x = 10$일때, $\frac{1}{10} = 0.1$ (거짓)

39. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.
$\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로
$\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250 이다.
$\log 2 = 0.3010,\ \ \log 3 = 0.4771,\ \ \log 4 = 2\log 2 = 0.6020$ 이므로
$\log 3 < 0.5250 < \log 4$
$\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$
$\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$
따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로
2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3 이다.

40. $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분이 x에 대한 이차방정식 $px^2-(4p-1)x+p+1=0$의 두 근일 때 1보다 큰 자연수 p의 값을 구하면?

① 2　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 7

해설

$\log A = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)이라 하면

$n + \alpha = \frac{4p-1}{p} = 4 - \frac{1}{p} = 3 + 1 - \frac{1}{p}$,

$n\alpha = \frac{p+1}{p}$

p는 1보다 큰 자연수이므로

$p > 1$

$0 < \frac{1}{p} < 1$

$0 > -\frac{1}{p} > -1$

$0 < 1 - \frac{1}{p} < 1$

$\therefore 3 = n,\ 1 - \frac{1}{p} = \alpha$

$3 \cdot (1 - \frac{1}{p}) = \frac{p+1}{p}$

$3 - \frac{3}{p} = 1 + \frac{1}{p}$

$2 = \frac{4}{p}$

$\therefore\ p = 2$

41. $f(x) = [\log_5 x]$일 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 9　② 12　③ 16　④ 20　⑤ 25

해설

(i) $1 \le x < 5$일 때, $0 \le \log_5 x < 1$이므로 $[\log_5 x] = 0$
따라서 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$
$= [\log_5 1] + [\log_5 2] + [\log_5 3] + [\log_5 4] = 0$

(ii) $5 \le x < 20$일 때, $1 \le \log_5 x < 20$이므로 $[\log_5 x] = 1$
따라서 $f(5) + f(6) + f(7) + \cdots + f(20)$
$= [\log_5 5] + [\log_5 6] + [\log_5 7] + \cdots + [\log_5 20]$
$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 16$

(i), (ii)에서 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) = 16$

42. 뉴턴의 냉각법칙에 의하면 어떤 물체의 처음 온도를 T_0, t분이 지난 후의 온도를 T, 주위의 온도를 T_S 라 할 때,
$\log(T - T_s) - \log(T_0 - T_s) = kt$(단, k는 상수)
인 관계가 성립한다고 한다. 처음 온도가 $97°C$인 물체를 $17°C$인 물에 넣고 식혔더니 3분 뒤에 $57°C$가 되었다고 한다. 물체의 온도가 $27°C$가 되도록 식히기 위해서 앞으로 더 필요한 시간은?

① 1분　② 2분　③ 3분　④ 6분　⑤ 9분

해설

$\log(T - T_s) - \log(T_0 - T_s) = kt$에서

$\log \dfrac{T - T_s}{T_0 - T_s} = kt$

처음 온도가 $97°C$인 물체를 $17°C$인 물에 넣고 식혔더니 3분 뒤에 $57°C$가 되었으므로

$\log \dfrac{57 - 17}{97 - 17} = 3k, \log \dfrac{1}{2} = 3k$

$\therefore k = \dfrac{1}{3} \log \dfrac{1}{2}$

물체의 온도가 $27°C$가 되기 위하여 걸린 시간을 t라 하면

$\log \dfrac{27 - 17}{97 - 17} = \dfrac{1}{3} \log \dfrac{1}{2} \times t$

$3 \log \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \log \dfrac{1}{2} \times t$

$\therefore t = 9$

따라서 더 필요한 시간은 $9 - 3 = 6$(분)이다.

43. 매년 매출액의 30%를 임금으로 지급하는 회사가 있다. 2014년 현재 5%인 물가상승률이 2024년까지 10년 동안 매년 같은 비율로 지속된다고 하자. 임금의 물가상승률을 감안하여 2024년 임금이 2007년 현재의 임금에 대하여 실질적으로 3배 인상되었다고 하려면 매년 x%의 매출 신장이 있어야 한다고 한다. 이때, $10x$의 값을 구하여라. (단, 인원수의 변화는 없고, 매출 신장률도 매년 일정하다. 또한 $10^{0.477} = 3$, $10^{0.0689} = 1.172$, $10^{0.0727} = 1.182$로 계산하여라.)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755

▶ 답:

▷ 정답: 172

해설

2014년의 매출액을 a라 하면 2014년의 임금은 $a \times 0.3$이다.
이때, 매출액이 매년 x%씩 늘어난다면 2024년의 매출액은

$a \times \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{10} \cdots$ ㉠

물가상승률을 감안한 2014년 임금의 실질적인 3배인 2024년의 임금은

$3 \times a \times 0.3 \times 1.05^{10} \cdots$ ㉡,

㉠, ㉡에서 $a \times \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{10} \times 0.3 = 3 \times a \times 0.3 \times 1.05^{10}$

$\therefore \ (1 + \frac{x}{100})^{10} = 3 \times 1.05^{10}$

따라서, $10 \log \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \log 3 + 10 \log 1.05$

㉠ $\Leftrightarrow \log \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{1}{10} \log 3 + \log 1.05 = 0.0689 = \log 1.172$

$\therefore \ 1 + \frac{x}{100} = 1.172$

$\therefore \ \frac{x}{100} = 0.172$

$\therefore \ 10x = 172$