1. $f(x) = 2x-3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(f(x)) = 4x-9$, $\quad f(f(f(x))) = 8x-21$ 이므로

$4x-9 = 8x-21$

$\therefore\ x = 3$

2. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $y = 2|x-1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M , m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

$y = 2|x-1| + x$ 에서
(i) $x \ge 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$
(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1) + x = -x + 2$ 이므로
$0 \le x \le 3$ 에서 $y = 2|x-1| + x$
따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7 , $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로
$M + m = 7 + 1 = 8$

3. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y),\ f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1,\ y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

4. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,
$\{3, 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3 = 8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$
따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

5. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 5$ 에 대하여 $f \circ h = g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$f \circ h = g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$
$f^{-1} \circ (f \circ h) = \left(f^{-1} \circ f\right) \circ h = I \circ h = h$ (단, I 는 항등함수)
$\therefore h = f^{-1} \circ g$
한 편, $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면
$x = \frac{1}{2}(y + 1)$
x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$
$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$
$h(x) = \left(f^{-1} \circ g\right)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(-4x + 5) = \frac{1}{2}(-4x + 5 + 1) = -2x + 3$
$\therefore h(-5) = -2 \cdot (-5) + 3 = 13$

6. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x+4$, $g(x) = -2x+3$ 이고 $\left(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h\right)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x+4$, $g(x) = -2x+3$ 에 대하여
$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로
$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= g(f(f(x))) \\ &= g(f(x+4)) \\ &= g((x+4)+4) \\ &= g(x+8) \\ &= -2(x+8)+3 = -2x-13 \end{aligned}$$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$
$-2a - 13 = 5$, $-2a = 18$
$\therefore a = -9$
$\therefore h^{-1}(5) = -9$

7. 함수 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-a|$ 가 $x=a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0)+f(3)$ 의 값은?

① 9　　② -9　　③ $2a$

④ $2a-3$　　⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x=a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0)=|-1|+|-2|+|-a|=3+a$

$f(3)=|2|+|1|+|3-a|=6-a$

$\therefore f(0)+f(3)=3+a+6-a=9$

8. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 일 때, $\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k(\neq 0)$ 로 놓으면 $a=bk,\ b=ck$

$\therefore\ a=ck^2$

$\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}=\frac{(ck^2-ck)(ck+c)}{(ck^2+ck)(ck-c)}$

$=\frac{ck(k-1)\cdot c(k+1)}{ck(k+1)\cdot c(k-1)}=1$

9. $a+b+c \neq 0$, $abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c가 $\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c}$를 만족할 때, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c} = k$

$b+c-a = 3ak \cdots$ ㉠

$c+a-b = 3bk \cdots$ ㉡

$a+b-c = 3ck \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢ : $a+b+c = 3(a+b+c)k$

$a+b+c \neq 0$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$

$k = \frac{1}{3}$ 를 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면

$b+c = 2a$, $c+a = 2b$, $a+b = 2c$

$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$

10. A, B 두 자동차의 연비 (연료 1 l 로 갈 수 있는 거리 : km/l) 의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A, B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?

① 300 km ② 350 km ③ 400 km

④ 450 km ⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/ l)	$5k$	$6k$
연료 탱크의 용량(l)	$4m$	$3m$
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$$\left(4m-\frac{120}{5k}\right) : \left(3m-\frac{120}{6k}\right)=7 : 5$$

$\therefore\ mk=20$

따라서, A 자동차가 연료 4 m 으로 갈 수 있는 총거리는

$5k\times4m=20mk=400(\mathrm{km})$

11. $2 \le x \le 3$ 에서 부등식 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$　　② $\dfrac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\dfrac{4}{3}$　　⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

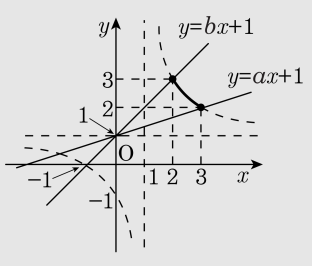
따라서, 분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y=\dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$ 은 a, b 의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \le x \le 3$ 에서 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립하려면 다음 그림에서 $a \le \dfrac{1}{3}$, $b \ge 1$



따라서, a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b 의 최솟값은 1 이므로 그 합은 $\dfrac{4}{3}$

12. 분수함수 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0)=g(0)=-1$
Ⅱ. $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
Ⅲ. $y=f(x-1)$ 의 그래프와 $y=g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0)=-1,\ g(0)=\frac{1}{f(0)}=-1$
$\therefore f(0)=g(0)=-1$ -<참>
Ⅱ. $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y=f(-x)$ 이므로
$y=f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}$
$=\frac{x+1}{x-1}$
$=\frac{1}{f(x)}$
$=g(x)$ -<참>
Ⅲ. $y=f(x-1)=\frac{x-2}{x}=1-\frac{2}{x}$
따라서, 점근선은 $x=0, y=1$
$y=g(x+1)=\frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x}$
따라서 점근선은 $x=0, y=1$ -<참>
따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

13. 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $f\circ f=f^2$, $f\circ f\circ f=f^3$, $\cdots$, $f\circ f\circ\cdots\circ f=f^n$ 이라 할 때, $f^{10}(1)$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2047 ⑤ 2048

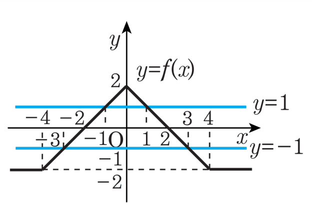
해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$
$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ(f\circ f))(x)=f((f\circ f)(x))=f(4x+3)=2(4x+3)+1=8x+7$

$$\vdots$$

$\therefore f^{10}(x)=2^{10}x+(2^{10}-1)=1024x+1023$
$\therefore f^{10}(1)=1024\times1+1023=2047$

14. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f\circ f)(x)=1$ 을 만족하는 모든 x 의 값의 곱은?



① -3　② -1　③ 3

④ 6　⑤ 9

해설

주어진 그래프로부터 함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x\le -4)\\ x+2 & (-4<x\le 0)\\ -x+2 & (0<x\le 4)\\ -2 & (x>4)\end{cases}$$

한편, $(f\circ f)(x)=f(f(x))=1$ ⋯⋯ ㉠

㉠ 에서 $f(x)=1$ 을 만족하는 x 의 값은

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표이므로

위의 그림에서 $x=-1,\ x=1$

따라서, ㉠에서 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$

(i) $f(x)=-1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-1$ 의 교점의 x 좌표이므로

위의 그림에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

(ii) $f(x)=1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표이므로

위의 그림에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 x 의 값의 곱은

$(-3)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 1=9$

15. 함수 $f(x) = |x+1| - 2$ 에서 $f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ 0

해설

$f(x) = |x+1| - 2$ 에서

$f(f(x)) = f(|x+1| - 2) = ||x+1| - 2 + 1| - 2$

$= ||x+1| - 1| - 2$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $f(f(x)) = x - 2$

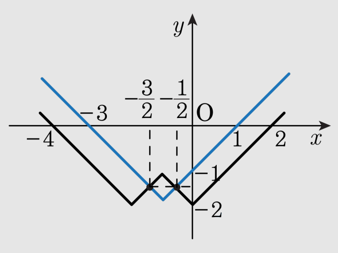
(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 2$

(iii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $f(f(x)) = x$

(iv) $x < -2$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x) = x - 1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x) = -x - 3$



따라서 교점은 $x = -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x) = (f \circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$

16. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f : A \rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 36 개

해설

함수 $f : A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
$A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
$1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

17. $T_n = 1+2+3+\cdots+n$이라 하고, $P_n = \frac{T_2}{T_2-1} \times \frac{T_3}{T_3-1} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_n-1}$ $(n \geq 2)$라고 할 때, P_{1991}에 가장 근사한 값은?

① 2.0　② 2.3　③ 2.6　④ 2.9　⑤ 3.2

해설

$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{T_n}{T_n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \fallingdotseq 2.9$$

18. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}=S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1\times 2007}+\frac{1}{2\times 2006}+\frac{1}{3\times 2005}+\cdots+\frac{1}{2006\times 2}+\frac{1}{2007\times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?

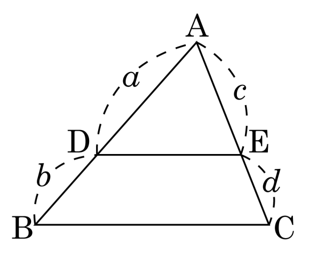
① $\frac{S}{1003}$ ② $\frac{S}{1004}$ ③ $\frac{S}{2006}$
④ $\frac{S}{2007}$ ⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A\times B$ 의 꼴이고
$A+B=2008$ 로 일정하므로
$\frac{1}{AB}=\frac{1}{A+B}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용한다.
$\therefore$(주어진 식)

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2007}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2006}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2005}\right)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2006}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{1}\right)\\
&=\frac{1}{2008}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{1}{2007}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\right\}\\
&=\frac{2}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)\\
&=\frac{S}{1004}
\end{aligned}
$$

19. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DB} = b$,$\overline{AE} = c$, $\overline{EC} = d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $a \neq b$)



① $ad = bc$

② $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$

③ $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$

④ $\dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{d}{a}$

⑤ $\dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{c-d}{a-b}$

해설

$\overline{DE} // \overline{BC}$이므로

$a : b = c : d \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \cdots ㉠$

① $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$이므로 $ad = bc$

② $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$이므로 $\dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$

$\therefore \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \cdots ㉡$

③ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$이므로 $\dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{c}{d} - 1$

$\therefore \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \cdots ㉢$

④ ㉠ ÷ ㉡에서 $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$

$\therefore \dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{c}{a}$

⑤ ㉢ ÷ ㉡에서 $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{c-d}{c+d}$

$\therefore \dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{c-d}{a-b}$

20. a가 실수일 때, 다음 식이 성립하기 위한 a값의 범위를 구하면?

$$a\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-1}$$

① $a > 0$

② $a \geq 1$

③ $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

④ $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$

⑤ $a > 1$ 또는 $a < -1$

해설

좌변 $= a\sqrt{\dfrac{a^2-(1)^2}{(a)^2}} = \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1}$

$\therefore \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1} = \sqrt{a^2-1}$ 에서

$\sqrt{a^2-1}(\dfrac{a}{|a|}-1) = 0$이므로

$\sqrt{a^2-1} = 0$ 또는 $\dfrac{a}{|a|} = 1$

$\therefore a = \pm 1$ 또는 $a > 0 \cdots$ ㉠

한편 근호 안의 값은 양수이므로

$a^2-1 \geq 0$으로부터 $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1 \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서 $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

21. $\sqrt{x^2+5x+13}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=4$

해설

$x^2+5x+13$ 이 완전제곱수이려면

$(x+2)^2 < x^2+5x+13 < (x+4)^2$ 에서 $x^2+5x+13=(x+3)^2$

$\therefore\ x=4$

22. 무리식 $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\cdots}}}}=p,\ 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}}=q$

라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6}}}}\cdots=x$ 라 두면

$\sqrt{6-x}=x$ 양변을 제곱하면

$x^2=6-x,\ x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3,\ 2$

여기서 $x>0$ 이므로 $x=2$

$\therefore p=2$

(ii) 주어진 식을 a 라 하면

$2-\dfrac{1}{a}=a,\ a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$

$\therefore a=1 \quad \therefore q=1$

$\therefore p+q=3$

23. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $a-b=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 가 성립할 때, a^2+ab+b^2 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5}+\sqrt{3}$　② $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$　③ $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

해설

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\} \\
&= \frac{1}{2}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{5}) \\
&= 3\sqrt{5}+3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ab &= \frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\} \\
&= \frac{1}{4}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{5}) \\
&= 2\sqrt{5}-2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a^2+ab+b^2=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$

24. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ 0

해설

$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 에서

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+2} = a,\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b$ 라 하면

$x = a - b,\ ab = -1$

$x^3 = (a-b)^3$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x$

$\therefore\ x^3 - 3x - 4 = 0$

$\therefore x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$

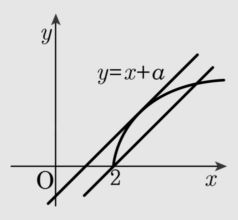
$= (x^3 - 3x - 4)(x + 2) + 4$

$= 0 + 4 = 4$

25. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

① $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ② $-2 \leq a < -\frac{3}{2}$ ③ $a < -\frac{3}{2}$
④ $a \leq -\frac{3}{2}$ ⑤ $a > -\frac{3}{2}$

해설



그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은
직선 $y = x+a$ 가 $(2,\ 0)$ 을 지날 때부터
직선이 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

ⅰ) $y = x+a$ 에 $(2,\ 0)$ 을 대입하면 $a = -2$

ⅱ) $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 접하기 위해서는 두 식을 연립한 식의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$\sqrt{2x-4} = x+a$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x(a-1) + a^2 + 4 = 0$

$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 - 4 = 0$

$-2a - 3 > 0$, $a < -\frac{3}{2}$

ⅰ) , ⅱ) 로 부터 $-2 \leq a < -\frac{3}{2}$