

1. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(f(x)) = 4x - 9, \quad f(f(f(x))) = 8x - 21 \quad \text{이므로}$$

$$4x - 9 = 8x - 21$$

$$\therefore x = 3$$

2. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M + m = 7 + 1 = 8$$

3. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

4. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,

$\{3, 4\}$ 로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8 - 2 = 6$ 따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

5. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 5$ 에 대하여 $f \circ h = g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 13

해설

$f \circ h = g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$
 $f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = I \circ h = h$ (단, I 는 항등함수)

$$\therefore h = f^{-1} \circ g$$

한 편, $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$h(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(-4x + 5) = \frac{1}{2}(-4x + 5 + 1) = -2x + 3$$

$$\therefore h(-5) = -2 \cdot (-5) + 3 = 13$$

6. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$$g^{-1} \circ h = f \circ f, h = g \circ f \circ f$$

$$\therefore h(x) = g(f(f(x)))$$

$$= g(f(x + 4))$$

$$= g((x + 4) + 4)$$

$$= g(x + 8)$$

$$= -2(x + 8) + 3 = -2x - 13$$

$$h^{-1}(5) = a \text{ 라고 하면 } h(a) = 5$$

$$-2a - 13 = 5, -2a = 18$$

$$\therefore a = -9$$

$$\therefore h^{-1}(5) = -9$$

7. 함수 $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9

② -9

③ $2a$

④ $2a - 3$

⑤ $-2a + 3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \leq a \leq 2$ 이어야 한다.

$$\text{이 때, } f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$$

$$f(3) = |2| + |1| + |3 - a| = 6 - a$$

$$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$$

8. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ 일 때, $\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k (\neq 0) \text{로 놓으면 } a = bk, b = ck$$

$$\therefore a = ck^2$$

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)} &= \frac{(ck^2 - ck)(ck + c)}{(ck^2 + ck)(ck - c)} \\ &= \frac{ck(k-1) \cdot c(k+1)}{ck(k+1) \cdot c(k-1)} = 1 \end{aligned}$$

9. $a + b + c \neq 0$, $abc \neq 0$ 인 세 실수 a, b, c 가 $\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c}$ 를 만족할 때, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c} = k$$

$$b+c-a = 3ak \cdots \textcircled{㉠}$$

$$c+a-b = 3bk \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a+b-c = 3ck \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} : a+b+c = 3(a+b+c)k$$

$$a+b+c \neq 0 \text{ 이므로 } k = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{3} \text{ 를 } \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에 각각 대입하여 정리하면}$$

$$b+c = 2a, c+a = 2b, a+b = 2c$$

$$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$$

10. A, B 두 자동차의 연비(연료 1l로 갈 수 있는 거리 : km/l)의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A, B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?

① 300 km

② 350 km

③ 400 km

④ 450 km

⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/l)	$5k$	$6k$
연료 탱크의 용량(l)	$4m$	$3m$
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$$\left(4m - \frac{120}{5k}\right) : \left(3m - \frac{120}{6k}\right) = 7 : 5$$

$$\therefore mk = 20$$

따라서, A 자동차가 연료 4m 으로 갈 수 있는 총거리는

$$5k \times 4m = 20mk = 400(\text{km})$$

11. $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

따라서, 분수함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

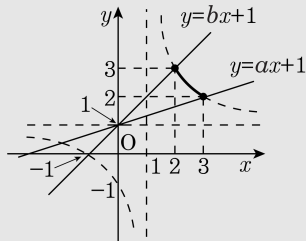
1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a , b 의 값에

관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립하려면 다음
그림에서 $a \leq \frac{1}{3}$, $b \geq 1$

따라서, a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b 의
최솟값은 1 이므로 그 합은 $\frac{4}{3}$



12. 분수함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

I. $f(0) = g(0) = -1$

II. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

III. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① I

② I, II

③ I, III

④ II, III

⑤ I, II, III

해설

I. $f(0) = -1, g(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

II. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

III. $y = f(x-1) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x=0, y=1$

$$y = g(x+1) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

따라서 점근선은 $x=0, y=1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (I), (II), (III) 이다.

13. 함수 $f(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f \circ f \circ f = f^3$, $\dots$, $f \circ f \circ \dots \circ f = f^n$ 이라 할 때, $f^{10}(1)$ 의 값은?

① 1023

② 1024

③ 1025

④ 2047

⑤ 2048

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

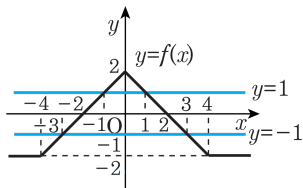
$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ (f \circ f))(x) = f((f \circ f)(x)) = f(4x + 3) = 2(4x + 3) + 1 = 8x + 7$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{10}(x) = 2^{10}x + (2^{10} - 1) = 1024x + 1023$$

$$\therefore f^{10}(1) = 1024 \times 1 + 1023 = 2047$$

14. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 모든 x 의 값의 곱은?



- ① -3 ② -1 ③ 3
④ 6 ⑤ 9

해설

주어진 그래프로부터 함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & (x \leq -4) \\ x + 2 & (-4 < x \leq 0) \\ -x + 2 & (0 < x \leq 4) \\ -2 & (x > 4) \end{cases}$$

한편, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1 \dots\dots \textcircled{1}$

① 에서 $f(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로 위의 그림에서 $x = -1, x = 1$

따라서, ①에서 $f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 1$

(i) $f(x) = -1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 의 교점의 x 좌표이므로 위의 그림에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$

(ii) $f(x) = 1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로 위의 그림에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 x 의 값의 곱은

$$(-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 9$$

15. 함수 $f(x) = |x + 1| - 2$ 에서 $f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ $-\frac{3}{2}$

④ 1

⑤ 0

해설

$$f(x) = |x + 1| - 2 \text{ 에서}$$

$$f(f(x)) = f(|x + 1| - 2) = ||x + 1| - 2 + 1| - 2$$

$$= ||x + 1| - 1| - 2$$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $f(f(x)) = x - 2$

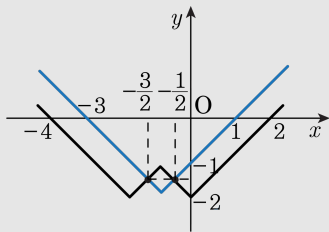
(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 2$

(iii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $f(f(x)) = x$

(iv) $x < -2$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x) = x - 1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x) = -x - 3$



따라서 교점은 $x = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족한다.

$$\therefore -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

16. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답: 36개

해설

함수 $f: A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.

$A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고

함수 f 가 일대일 대응이므로

두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서

1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.

예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.

한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로

구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

17. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 이라 하고, $P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \times \frac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_n - 1}$ ($n \geq 2$) 라고 할 때, P_{1991} 에 가장 근사한 값은?

① 2.0

② 2.3

③ 2.6

④ 2.9

⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{T_n - 1} &= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)} \\ &= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)} \end{aligned}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \approx 2.9$$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} = S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1 \times 2007} + \frac{1}{2 \times 2006} + \frac{1}{3 \times 2005} + \cdots + \frac{1}{2006 \times 2} + \frac{1}{2007 \times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?

① $\frac{S}{1003}$

② $\frac{S}{1004}$

③ $\frac{S}{2006}$

④ $\frac{S}{2007}$

⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

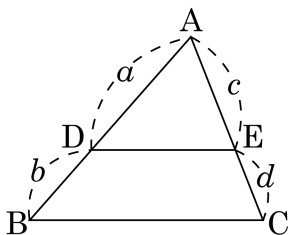
주어진 식의 각 항의 분모가 $A \times B$ 의 꼴이고
 $A + B = 2008$ 로 일정하므로

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A+B} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \text{ 임을 이용한다.}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2007} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2006} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2005} \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2006} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{2008} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \\ &= \frac{S}{1004} \end{aligned}$$

19. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{EC} = d$ 일 때, 다음 중 a, b, c, d 사이의 관계로 옳지 않은 것은? (단, $a \neq b$)



① $ad = bc$

② $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

③ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

④ $\frac{c+d}{a+b} = \frac{d}{a}$

⑤ $\frac{c+d}{a+b} = \frac{c-d}{a-b}$

해설

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots \textcircled{㉠}$$

① $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로 $ad = bc$

② $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로 $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{㉡}$$

③ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로 $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{㉢}$$

④ $\textcircled{㉠} \div \textcircled{㉡}$ 에서 $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$$\therefore \frac{c+d}{a+b} = \frac{c}{a}$$

⑤ $\textcircled{㉢} \div \textcircled{㉡}$ 에서 $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

$$\therefore \frac{c+d}{a+b} = \frac{c-d}{a-b}$$

20. a 가 실수일 때, 다음 식이 성립하기 위한 a 값의 범위를 구하면?

$$a\sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 - 1}$$

① $a > 0$

② $a \geq 1$

③ $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

④ $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$

⑤ $a > 1$ 또는 $a < -1$

해설

$$\text{좌변} = a\sqrt{\frac{a^2 - (1)^2}{(a)^2}} = \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{a^2 - 1} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{a^2 - 1} \left(\frac{a}{|a|} - 1 \right) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{a^2 - 1} = 0 \text{ 또는 } \frac{a}{|a|} = 1$$

$$\therefore a = \pm 1 \text{ 또는 } a > 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

한편 근호 안의 값은 양수이므로

$$a^2 - 1 \geq 0 \text{ 으로부터 } a \geq 1 \text{ 또는 } a \leq -1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 } a = -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

21. $\sqrt{x^2 + 5x + 13}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 4$

해설

$x^2 + 5x + 13$ 이 완전제곱수이려면

$(x+2)^2 < x^2 + 5x + 13 < (x+4)^2$ 에서 $x^2 + 5x + 13 = (x+3)^2$

$\therefore x = 4$

22. 무리식 $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}} = p$, $2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots}}}} = q$

라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}} = x$ 라 두면

$\sqrt{6 - x} = x$ 양변을 제곱하면

$$x^2 = 6 - x, \quad x^2 + x - 6 = 0, \quad (x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2$$

여기서 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

$$\therefore p = 2$$

(ii) 주어진 식을 a 라 하면

$$2 - \frac{1}{a} = a, \quad a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a - 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore q = 1$$

$$\therefore p + q = 3$$

23. 두 실수 a, b 에 대하여 $a + b = \sqrt{7\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $a - b = \sqrt{7\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ 가 성립할 때, $a^2 + ab + b^2$ 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5} + \sqrt{3}$

② $5\sqrt{5} + \sqrt{3}$

③ $5\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\} \\&= \frac{1}{2}(7\sqrt{5} - \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\&= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab &= \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\} \\&= \frac{1}{4}(7\sqrt{5} - \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \sqrt{5}) \\&= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = 5\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

24. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

① 4

② 3

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \text{에서}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}+2} = a, \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b \text{라 하면}$$

$$x = a - b, ab = -1$$

$$x^3 = (a - b)^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x$$

$$\therefore x^3 - 3x - 4 = 0$$

$$\therefore x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$$

$$= (x^3 - 3x - 4)(x + 2) + 4$$

$$= 0 + 4 = 4$$

25. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

① $-2 < a < -\frac{3}{2}$

② $-2 \leq a < -\frac{3}{2}$

③ $a < -\frac{3}{2}$

④ $a \leq -\frac{3}{2}$

⑤ $a > -\frac{3}{2}$

해설

그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은

직선 $y = x + a$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때부터 직선이 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

i) $y = x + a$ 에 $(2, 0)$ 을 대입하면 $a = -2$

ii) $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x + a$ 가 접하기 위해서는 두 식을 연립한 식의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\sqrt{2x-4} = x + a$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 2x(a-1) + a^2 + 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 - 4 = 0$$

$$-2a - 3 > 0, a < -\frac{3}{2}$$

i), ii)로 부터 $-2 \leq a < -\frac{3}{2}$

