1. $U = \{x|x\text{는 5 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,2,4,5\}, B = \{2,3,5\}$ 일 때, $\{(A-B)\cup A\}\cap B^c$ 은?

① $\{1\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{1,4\}$
④ $\{2,5\}$ ⑤ $\{1,4,5\}$

해설

$U = \{1,2,3,4,5\}, A-B = \{1,4\}$ 이므로 $\{(A-B)\cup A\}\cap B^c = \{\{1,4\}\cup A\} - B = \{1,2,4,5\} - \{2,3,5\} = \{1,4\}$ 이다.

2. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cap Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \to \sim q$ ② $q \to p$ ③ $\sim p \to q$
④ $q \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

해설
$P \cap Q = P$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 따라서, $p \to q$ 가 참이므로 대우 명제인 $\sim q \to \sim p$ 도 참이다.

3. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 에 대하여 $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ 일 때, $n(A+B)$ 를 구하면?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

$1+1=2,\ 1+2=3,\ 1+3=4,\ 1+6=7$

$2+1=3,\ 2+2=4,\ 2+3=5,\ 2+6=8$

$3+1=4,\ 3+2=5,\ 3+3=6,\ 3+6=9$

$4+1=5,\ 4+2=6,\ 4+3=7,\ 4+6=10$ 이므로

$A+B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$\therefore\ n(A+B)=9$

4. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ 7\}$, $B = \{a+1,\ 4,\ 6\}$에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, $a \times b$의 값은?

① 16　　② 20　　③ 24　　④ 28　　⑤ 32

해설

$A \subset B$이고 $B \subset A$는 $A = B$이다. 집합 A, B의 모든 원소가 같아야 하므로 $a+1=7$ 이다.
즉 $a = 6$이고 집합 $B = \{7,\ 4,\ 6\}$이므로 $b = 4$이다. 따라서 $a \times b = 6 \times 4 = 24$이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$
② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$
③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$
④ $n(A \cap B \cap \varnothing) = 0$
⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$
② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$
③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

6. 두 자리 자연수 중 k의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ 라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26　　② 27　　③ 28　　④ 29　　⑤ 30

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$

$10 \le 6n < 100$ 에서 $2 \le n \le 16 \therefore\ n(A_6) = 15$

$10 \le 4n < 100$ 에서 $3 \le n < 25 \therefore\ n(A_4) = 22$

$10 \le 12n < 100$ 에서 $1 \le n \le 8 \therefore\ n(A_{12}) = 8$

그러므로 $n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$

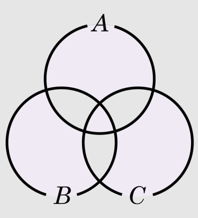
7. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $X \circledcirc Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의하자. 1 에서 30 까지의 자연수 중 2 의 배수, 3 의 배수, 5 의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $(A \circledcirc B) \circledcirc C$ 의 원소의 개수는?

① 11 개 ② 12 개 ③ 13 개 ④ 14 개 ⑤ 15 개

해설

$$\begin{aligned}(X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) &= (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X - Y) \cup (Y - X)\end{aligned}$$

이 정의로부터 $(A \circledcirc B) \circledcirc C$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $A \cap B$는 6 의 배수의 집합,
$B \cap C$는 15 의 배수의 집합,
$C \cap A$는 10 의 배수의 집합,
$A \cap B \cap C$는 30 의 배수의 집합이므로
$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(C) = 6,$
$n(A \cap B) = 5,\ n(B \cap C) = 2,\ n(C \cap A) = 3,$
$n(A \cap B \cap C) = 1$

$$\begin{aligned}&\therefore n\left\{(A \circledcirc B) \circledcirc C\right\} = n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2\left\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\right\} \\ &\quad + 4 \cdot n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 10 + 6 - 2(5 + 2 + 3) + 4 \\ &= 15\end{aligned}$$

8. 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A - B) \cup (B \cap A^c)$ 라고 정의하고, $n(A) = 8,\ n(A \cup B) = 16,\ n(A \cap B) = 5, n(A \cup B) = 16,\ n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n((A \triangle B) \triangle A)$ 를 구하면?

① 5 ② 8 ③ 9 ④ 12 ⑤ 13

해설

$(A \triangle B) \triangle A = B$ 이므로

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$16 = 8 + n(B) - 5$

$\therefore n(B) = 13$

9. 두 조건 p, q가 $p\ :|x| < a$, $q\ :|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$

④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

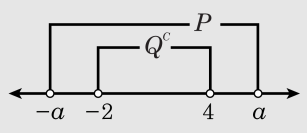
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow \ Q^c \subset P$

$P = \{x \mid -a < x < a\}$

$Q = \{x \mid x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x \mid -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

10. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ p : $|a|+|b|=0$ q : $ab=0$

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ q : $(a-b)^2+(b-c)^2=0$

㉢ $p : 0<x<y$ $q : x^2<y^2$

㉣ $p : x<y$ $q : [x]<[y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡
② ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉣
⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \not\Rightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.

㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \not\Leftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족

㉣ $p \not\Rightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 세 조건 p, q, r이 다음과 같다.

$p : (A-B) \cup (B-A) = \varnothing$
$q : A = B$
$r : A \cup B = B$

이 때, 조건 p 는 조건 q이기 위한 ㉠조건이고, 조건 q는 조건 r 이기 위한 ㉡조건이다. ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 충분
② 필요충분, 필요
③ 필요, 필요
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요

해설

$(A-B) \cup (B-A)\ \varnothing \leftrightarrow A-B = \varnothing, B-A = \varnothing \leftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$
$\leftrightarrow A = B \therefore p \leftrightarrow q$ 이므로
㉠: 필요충분조건
$A \cup B\ B \leftrightarrow A \subset B$ 이고 $A = B \Rightarrow A \subset B$ (역은 성립하지 않는다.)
$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 ㉡: 충분조건

12. 세 양수 a, b, c가 $abc=1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \ge 3$ Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \ge 3$ Ⅲ. $ab+bc+ca \ge 3$ Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \ge 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc=1$이므로

Ⅰ. $a+b+c \ge 3\times \sqrt[3]{abc}=3$

Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2\times b^2\times c^2}=3$

Ⅲ. $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{ab\times bc\times ca}=3$

Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$

$=abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1$

$\ge 1+3+3+1=8$

13. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.
다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

> 두 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 4, 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6 이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6 으로 되어있다.

14. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \in 2^A$　② $\varnothing \subset 2^A$　③ $\{\varnothing\} \in 2^A$

④ $\{\varnothing\} \subset 2^A$　⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다.
집합 A 의 부분집합은 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.
따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.
③ $\{\varnothing\} \notin 2^A$

15. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } a^2\text{을 } 10\text{으로 나눈 나머지, } a\text{는 자연수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

제곱수의 일의 자리를 살펴보면 1^2 은 1, 2^2 은 4, 3^2 은 9, 4^2 은 6, 5^2 은 5, 6^2 은 6, 7^2 은 9, 8^2 은 4, 9^2 은 1, 10^2 은 0, 11^2 은 1, $\cdots$ 이므로

$A = \{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9\}$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이다.

16. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B = \{2,\ 4,\ 8\}$ 에 대하여 $X - A = \varnothing$, $n(X \cap B) = 1$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 12 개

해설

$X - A = \varnothing$ 이면 $X \subset A$
$n(X \cap B) = 1$ 이므로 X 는 B의 원소 하나를 포함하고 나머지 두 원소는 포함하지 않는 A 의 부분집합이다.
X 가 2 를 포함하고 4, 8 을 포함하지 않은 경우 (집합 X의 개수) $= 2^{5-3} = 4$(개) , X 가 4 를 포함한 경우와 8 을 포함한 경우도 마찬가지이므로
(집합 X의 개수) $= 4 \times 3 = 12$(개) 이다.

17. 자연수 p 에 대하여 A_p 는 100 이하인 p 의 배수의 집합을 나타낼 때, $n(A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup A_{10})$ 의 값을 구한 것은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$A_2 = \{2, 4, \cdots, 100\}$
$A_4 = \{4, 8, \cdots, 100\}$
$A_6 = \{6, 12, \cdots, 100\}$
$A_8 = \{8, 16, \cdots, 100\}$
$A_{10} = \{10, 20, 30, \cdots, 100\}$
$A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup A_{10} = A_2$
100 이하인 2 의 배수의 집합이므로 50 개이다.

18. 집합 $U = \{x|x \leq 10,\ x$는 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 가 있다. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

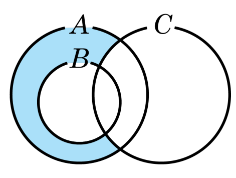
▶ 답:

▷ 정답: 40

해설

$U = \{x|x \leq 10,\ x$는 자연수$\} = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ 집합 A , B 는 서로소이고, 전체집합 U 의 모든 원소를 나누어 가진다.
전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $1+2+3+\cdots+10 = 55$ 이고,
A 의 모든 원소의 합은 15 이므로
집합 B 의 모든 원소의 합은 $55 - 15 = 40$

19. 집합 $A = \left\{x | x < 20,\ x\text{는 홀수인 자연수}\right\}$, $B = \left\{2x + 1 | x\text{은 5보다 작은 자연수}\right\}$, $C = \left\{x | \dfrac{x+3}{10} = n,\ n\text{은 자연수}\right\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

$A = \left\{x | x < 20,\ x\text{는 홀수인 자연수}\right\} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$,

$B = \left\{2x + 1 | x\text{은 5보다 작은 자연수}\right\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$,

$C = \left\{x | \dfrac{x+3}{10} = n,\ n\text{은 자연수}\right\} = \{7,\ 17,\ 27,\ 37,\ 47,\ \cdots\}$,

따라서 $(A - B) - C = \{1,\ 11,\ 13,\ 15,\ 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.

20. 전체 50 명의 학생 중 A 문제집을 가지고 있는 학생은 30 명, B 문제집을 가지고 있는 학생은 27 명이다. A, B 문제집 중 한 권만을 가지고 있는 학생 수의 최댓값을 p , 최솟값을 q 라고 할 때, $p-q$ 를 구하여라.

▶ 답: ______ 명

▷ 정답: 40 명

해설

전체 학생의 집합을 U , A 문제집을 가지고 있는 학생의 집합을 A , B 문제집을 가지고 있는 학생의 집합을 B 라 두면, A, B 문제집 중 한 권만을 가지고 있는 학생의 집합은 $(A \cup B) - (A \cap B)$,
$n(U) = 50, n(A) = 30, n(B) = 27$ 이므로,
$30 \leq n(A \cup B) \leq 50, 7 \leq n(A \cap B) \leq 27$
따라서, $3 \leq n((A \cup B) - (A \cap B)) \leq 43$
$\therefore p - q = 43 - 3 = 40$

21. 어느 학생이 x, y, z의 평균 A를 구하기 위하여 x, y의 평균 C를 먼저 구하고, C와 z의 평균 B를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?
(단, $x < y < z$)

① $B = A$　　② $B < A$　　③ $B > A$

④ $B \leq A$　　⑤ $B \geq A$

해설

$A = \dfrac{x+y+z}{3}$, $C = \dfrac{x+y}{2}$

$B = \dfrac{\dfrac{x+y}{2}+z}{2} = \dfrac{x+y+2z}{4}$,

$B - A = \dfrac{2z-x-y}{12} = \dfrac{(z-x)+(z-y)}{12} > 0$

$\therefore \quad B > A$

22. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=1$일 때 $ab+bc+ca$의 최댓값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{2}{11}$

해설

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$이므로

$ab+bc+ca$의 최댓값은 등호가 성립하는 경우이다.

또 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로

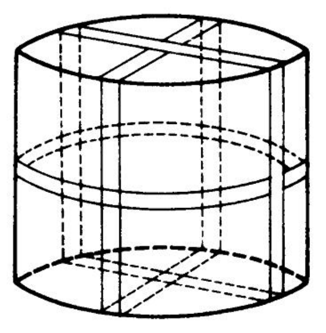
$a+b+c=1$에서 $a=b=c=\frac{1}{3}$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \geq ab+bc+ca$

$\therefore ab+bc+ca$의 최댓값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

23. 길이가 60 cm 인 장식용 테이프를 가지고 원기둥 모양의 선물을 장식하려 한다. 테이프를 3 개로 잘라 아래의 그림과 같이 선물의 표면에 붙여서 장식할 때, 다음은 이 테이프로 장식할 수 있는 선물의 최대 부피를 구하는 과정이다. 그런데 아래 풀이 과정은 잘못되었다. 어디에서 잘못이 일어났는가?



선물의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h라 하면 $2 \times 2(2r+h)+2\pi r=60 \cdots$ ㉠ 한편, (산술평균) ≥ (기하평균) 이므로 ⋯ ㉡ $8r+4h+2\pi r \geq 3^3\sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r} \cdots$ ㉢ 즉, $60 \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot^3 \sqrt{\pi r^2 h}$ 따라서, $\pi r^2 h \leq 125 \cdots$ ㉣ 이상에 의해, 구하려는 최대 부피는 $125\,\mathrm{cm}^3$ 이다. ⋯ ㉤

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$8r+4h+2\pi r\ 3^3\sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r}$ 에서
등호는 $8r=4h=2\pi r$ 일 때 성립한다.
그런데 $8 \neq 2\pi$ 이므로 최대 부피는 $125\,\mathrm{cm}^3$ 가 아니다.

24. a, b가 양의 실수일 때, $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 A를 가지며, 이 때의 a의 값은 B이다. A, B에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$　　② $3+\sqrt{2},\ 1$　　③ $3,\ \dfrac{1}{2}$

④ $4,\ \dfrac{1}{2}$　　⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a \cdot 4b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ 일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ 일 때 성립하므로 $ab=\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$

따라서, $a=1$, $b=\dfrac{1}{4}$ 일 때 $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=4$

25. 두 이차방정식 $x^2-ax+b=0$과 $x^2-bx+a=0$이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b의 값을 정할 때, $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α,β, $x^2-bx+a=0$의 근을 γ, σ라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,
$\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$를 만족한다.
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$, $\gamma+\sigma=b$,
$\gamma\sigma=a(a,b>0)$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{9(\gamma+\delta)}{\gamma\delta}$
$=\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{9b}{a}}=6$
$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}\geq 6$