

1. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 찾아라.

㉠ $1 \in A$

㉡ $3 \in A$

㉢ $4 \notin A$

㉣ $12 \in A$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉣

해설

5의 약수는 1, 5이다.

2. 다음 각 집합을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것을 보기에서 골라라.

보기

- ㉠ $\{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$
- ㉡ $\{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 } 2\text{의 배수}\}$
- ㉢ $\{x|x\text{는 } 24\text{의 약수}\}$
- ㉣ $\{x|x\text{는 } 18\text{의 약수}\}$
- ㉤ $\{x|x\text{는 } 36\text{의 배수}\}$

(1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(2) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

조건제시법은 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 나타내는 방법이다.

(1) 집합의 원소들의 공통된 성질은 10 이하의 짝수(2의 배수)라는 점이고

(2) 집합의 원소들의 공통된 성질은 18의 약수라는 점이다.

3. 다음 중 유한집합이 아닌 것은?

① $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 큰 자연수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 30 \text{보다 작은 } 5 \text{의 배수}\}$

⑤ $\{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$

해설

③ $\{6, 7, 8, 9, \dots\} \Rightarrow \text{무한집합}$

4. 다음 보기 중 옳지 않은 것을 골라라.

보기

㉠ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$ 일 때, $n(A) = 2$

㉡ $B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(B) = 4$

㉢ $n(\phi) = 1$

㉤ $C = \{x \mid x \text{는 두 자리 자연수}\}$ 이면, $n(C) = 90$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\{4, 8\}$ 이므로 $n(A) = 2$ 이다.

㉡ $\{1, 3, 9, 27\}$ 이므로 $n(B) = 4$ 이다.

㉢ 공집합은 원소의 개수가 없다. 그러므로 $n(\phi) = 0$ 이다.

㉤ $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ 이므로 $n(C) = 99 - 9 = 90$ 이다.

5. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $4 \in A$

② $3 \in A$

③ $\emptyset \subset A$

④ $8 \in A$

⑤ $\{1, 2, 4, 8\} \subset A$

해설

② $3 \notin A$ 에서 3은 A 의 원소가 아니다.

6. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$ 일 때, 공집합이 아닌 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 63 개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$\text{전체 부분집합의 개수} : 2^6 = 64$$

$$64 - 1(\text{공집합의 개수}) = 63$$

7. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3 을 포함하고 원소 6 을 포함하지 않는 부분집합으로 옳은 것은?

① $\emptyset$

② $\{1, 6\}$

③ $\{1, 4, 12\}$

④ $\{1, 3, 4, 10\}$

⑤ $\{1, 3, 4, 12\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

① 원소 1, 3 이 포함되지 않음.

② 원소 6 이 포함.

③ 원소 3 이 포함되지 않음.

④ $\{1, 3, 4, 10\} \not\subset A$

⑤ $\{1, 3, 4, 12\} \subset A$

8. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$, $B = \{1, x+1, x+3\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, x 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$A = B$ 이면 두 집합의 모든 원소가 같다. 집합 A 를 원소나열법으로 나타내면

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4\} = \{1, x+1, x+3\}$ 이므로 $x = 1$ 이다.

9. 다음 두 집합 A , B 에 대하여 $A \cap B$ 와 $A \cup B$ 를 구한 것이다. 빈 칸에 들어갈 알맞은 원소를 차례대로 쓴 것을 골라라.

$$A = \{x | x \text{는 알파벳의 모음}\}$$

$$B = \{x | x \text{는 단어 } apple \text{에 들어 있는 모음}\}$$

$$A \cap B = \{a, \square\}$$

$$A \cup B = \{a, e, i, l, \square, o, u\}$$

- ① e, p ② l, p ③ o, u ④ e, o ⑤ p, e

해설

$$A = \{a, e, i, o, u\}, \quad B = \{a, e, l, p\}$$

$$A \cap B = \{a, e\}, \quad A \cup B = \{a, e, i, l, p, o, u\}$$

10. 집합 A, B 가 전체집합 U 의 부분집합일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup \emptyset = A$

② $A \cup A^c = U$

③ $(A^c)^c = A$

④ $\emptyset^c = U$

⑤ $A - B = A \cup B^c$

해설

$$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c$$

11. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & (x > 0) \\ -x^2 + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

따라서 치역은 $\{-3, 0, 1, 3, 4\}$ 이므로

$$\text{모든 원소의 합은 } (-3) + 0 + 1 + 3 + 4 = 5$$

12. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 3가지

▷ 정답: 3가지

해설

함수 f 가 상수함수인 경우는

$$f(1) = f(2) = f(3) = a$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = b$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = c \text{ 의 3가지이다}$$

13. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x - 1$

② $y = \frac{1}{2}x + 1$

③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$

④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$

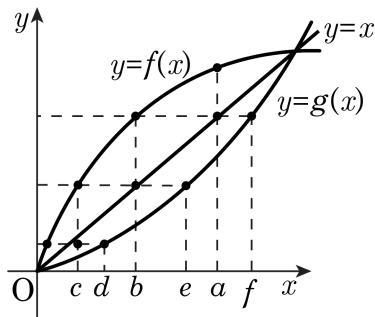
⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$$y = 2x - 2, x = \frac{1}{2}y + 1 \quad x, y \text{ 를 바꿔주면}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

14. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. 이때, $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ d

⑤ e

해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \dots \textcircled{\Gamma}$ 이고

$f^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f(k) = a$ 에서 $k = b$

$\therefore f^{-1}(a) = b \dots \dots \textcircled{\Delta}$

$f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 에서 $l = c$

$\therefore f^{-1}(b) = c \dots \dots \textcircled{\ominus}$

$g^{-1}(c) = m$ 이라 하면 $g(m) = c$ 에서 $m = d$

$\therefore g^{-1}(c) = d \dots \dots \textcircled{\boxplus}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta}, \textcircled{\ominus}, \textcircled{\boxplus}$ 에서

$(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$

$= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

15. $x = 4 - \sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 8x + 15$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x = 4 - \sqrt{3}$ 에서 $x - 4 = -\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면, $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 = 3$ 이므로

$$x^2 - 8x = -13$$

$$\therefore x^2 - 8x + 15 = -13 + 15 = 2$$

16. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.

③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.

⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

17. 명제「 $p \rightarrow \sim q$ 」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「 $q \rightarrow \sim p$ 」도 참이다.

18. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0$, $q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

19. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 이므로 $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

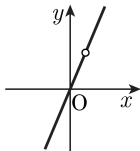
- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
 ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
 ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

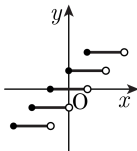
$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

20. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x 에서 y 로의 함수인 것은?

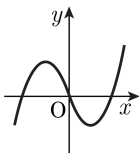
①



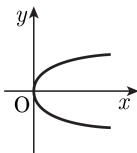
②



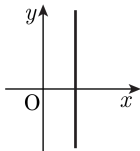
③



④



⑤



해설

①은 대응되지 못하는 x 의 값이 존재하고

②, ④, ⑤는 x 의 한 값에 y 의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

21. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 15개

② 60개

③ 120개

④ 125개

⑤ 243개

해설

「 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」는
일대일 함수를 의미한다.

즉, $X = \{1, 2, 3\}$ 이고

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

일대일 함수는 $5 \times 4 \times 3 = 60(\text{개})$

22. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{ 이므로, } f(-2) = 3$$

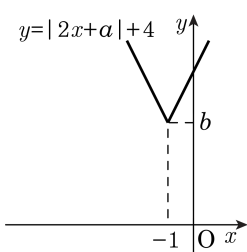
$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

23. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10



해설

$$y = |2x + a| + 4$$

$$= \left| 2 \left(x + \frac{a}{2} \right) \right| + 4$$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는
 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방
 향으로
 $-\frac{a}{2}$ 만큼,

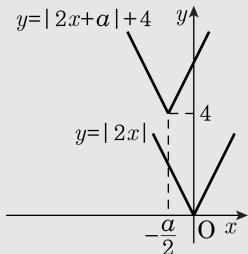
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} = -1, b = 4$$

$$\therefore a = 2, b = 4 \quad \therefore ab = 8$$



24. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} \text{의 우변을 통분하여 계산하면}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

25. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

26. 다음 식을 간단히 하면?

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

① 1

② x

③ $\frac{1}{x}$

④ $\frac{1}{1-x}$

⑤ $-x$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} \\ &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

27. $(x+y):(y+z):(z+x)=6:7:5$ 일 때, $\frac{x^2-yz}{x^2+y^2}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$

② $-\frac{4}{13}$

③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{4}{13}$

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\begin{cases} x+y=6k \cdots \textcircled{㉠} \\ y+z=7k \cdots \textcircled{㉡} \\ z+x=5k \cdots \textcircled{㉢} \end{cases} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 를 해 주면 $2(x+y+z)=18k$

$\therefore x+y+z=9k$

$\therefore x=2k, y=4k, z=3k$

$\therefore \frac{x^2-yz}{x^2+y^2} = \frac{4k^2-12k^2}{4k^2+16k^2} = \frac{-8}{20} = -\frac{2}{5}$

28. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\frac{-x + 2(y + 4z) - 8 \times z}{-5 + 2 \times 2 - 8 \times 3}$$
$$= \frac{-x + 2y + 8z - 8z}{-5 + 4 - 24} = \frac{-x + 2y}{-25}$$

$$\therefore A = -25$$

29. $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$

② $24\sqrt{3}$

③ $30\sqrt{3}$

④ 48

⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, \quad xy = 1$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 4^3 - 3 \times 4 = 52 \end{aligned}$$

30. $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a$, $y = b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ &= \frac{3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

31. 함수 $y = \frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$y = \frac{-2x+1}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = \frac{-3}{x-2} - 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$$k = -3, a = 2, b = -2$$

$$\therefore k + a + b = -3 + 2 - 2 = -3$$

32. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서 점근선은}$$

$$x = -1, y = 3$$

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

33. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

$$\therefore a = 1$$

34. 명제 ‘모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.’를 부정한 것은?

- ① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.
- ② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.
- ⑤ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

‘ $xy = yz = zx$ ’는 ‘ $xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$ ’이므로
‘ $xy = yz = zx$ ’의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$
이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여
 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

35. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고, 명제 ' p 이면 q 이다.'가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q^c$

⑤ $Q \cup P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건 p 는 만족하지만 조건 q 는 만족하지 않는 것이므로 $x \in P$ 이고 $x \notin Q$ 인 x 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합 $P - Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

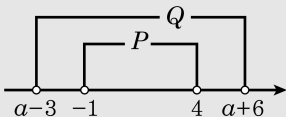
36. 실수 전체의 집합에서의 두 조건 $p: -1 < x < 4$, $q: a-3 < x < a+6$ 일 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이기 위한 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P = \{x \mid -1 < x < 4\}$

$$Q = \{x \mid a-3 < x < a+6\}$$



이때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 위 수직선에서 $a-3 \leq -1$ 이고 $a+6 \geq 4$ 이다.

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

따라서, a 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

37. 전체집합 U 의 세 부분집합 P, Q, R 는 각각 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset R$

③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$

⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

$$\therefore P^c \subset R^c$$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

38. $x > 2$ 일 때, $x - 2 + \frac{4}{x - 2}$ 의 최솟값은?

① 0

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

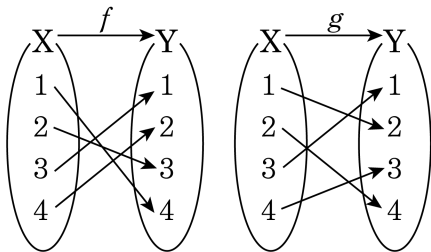
산술 기하평균의 관계에서

$$(x - 2) + \frac{4}{(x - 2)} \geq 2 \sqrt{(x - 2) \frac{4}{(x - 2)}}$$

$$= 2\sqrt{4} = 4$$

∴ 최솟값 : 4

39. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\therefore g \cdot f^{-1}$$

$$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$$

$$= h \cdot I = h$$

$$\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$$

$$= g(f^{-1}(2))$$

$$= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$$

$$\therefore g(4) = 3$$

40. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는

$x+2y=2$ 의 그래프에서

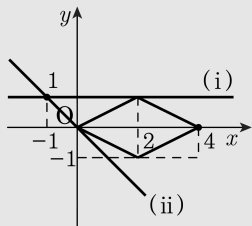
$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한

것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼

평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

41. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-3)^2} \\ &= |a+1| + |a-3| = (a+1) - (a-3) = 4\end{aligned}$$

42. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

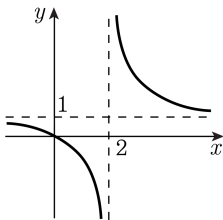
① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2



해설

점근선이 $x=2$, $y=1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c} \text{ 에서 } a=1, c=-2 \text{ 이다.}$$

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$$\therefore a+b+c=-1$$

43. $y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 하면, $g(-3)$ 의 값은?

① 4

② $\sqrt{-5}$

③ -5

④ 없다

⑤ -3

해설

역함수가 존재하려면 일대일 대응이 되어야 한다.

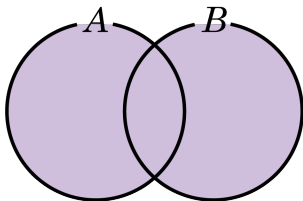
$y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수 $y = g(x)$ 의 정의역은

$y = \sqrt{2x+1}$ 의 치역이 되어야 하는데

이 함수의 치역은 음수가 될 수 없으므로

$g(-3)$ 의 값은 존재하지 않는다.

44. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 9, 15\}$, $B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 105

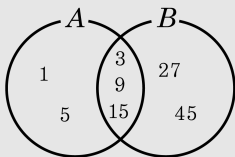
해설

$B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.

원소나열법으로 고쳐보면,

$B = \{3, 9, 15, 27, 45\}$ 이다.

벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



색칠한 부분의 원소는 $\{1, 3, 5, 9, 15, 27, 45\}$ 이다.

따라서 모든 원소의 합은

$1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 27 + 45 = 105$ 이다.

45. 은지네반 35명의 학생의 생활습관 조사를 하였다. 11시 이전에 자는 학생이 18명이고, 아침밥을 매일 먹는 학생이 22명이었다. 이때, 11시 이전에 자고 아침밥을 매일 먹는 최대 인원수를 a , 최소 인원수를 b 라고 할 때, a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

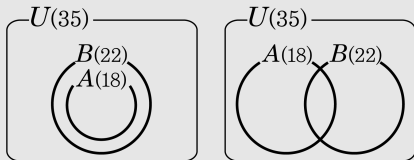
▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

11시 이전에 자는 학생의 집합을 A , 아침밥을 매일 먹는 학생의 집합을 B 라고 할 때, 교집합의 개수의 최대, 최소는 다음 벤 다이어그램을 보면 알 수 있다.



11시 이전에 자는 학생 18명 모두 아침밥을 먹는다고 가정했을 때, 최대인원수는 18명이다. 35명의 학생 중 적어도 한 명은 11시 이전에 자거나 아침밥을 먹는다고 가정하면, 최소 인원수는 $18 + 22 - 35 = 5$ (명)이다.

46. 수민이네 반 학생을 대상으로 과목에 대한 선호도를 조사하였더니 음악을 좋아하는 학생이 20명, 체육을 좋아하는 학생이 17명, 음악과 체육을 모두 좋아하는 학생이 8명이고 음악을 좋아하지 않는 학생이 15명이다. 이때, 음악과 체육을 모두 좋아하지 않는 학생 수를 구하여라.



답 :

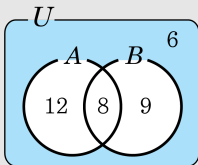
명



정답 : 6명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



47. x, y 가 실수이고 A, B, C 를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건은?

① $p: x+y \geq 2, q: x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p: |x| + |y| = 0, q: 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$

③ $p: xy + 1 > x + y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p: A \subset B \subset C, q: A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p: x+y$ 가 유리수이다. $q: x, y$ 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2 \quad x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례: $x = 3, y = -3$)

② $|x| + |y| = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$

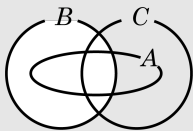
여기서 $|x| + |y| = 0$ 은 $x = 0, y = 0$ 과 같으므로

$x = 0, y = 0 \rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$ (충분조건)

(반례: $x = 8, y = -8$)

③ $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

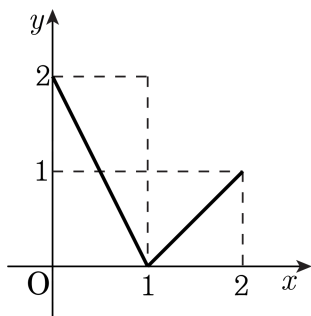
④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x, y$ 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례: $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$)

48. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



$f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3$, $\dots$, $f \circ f^n = f^{n+1}$ 로 정의할 때, $f^{10}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① $\frac{1}{3}$

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

그림에서

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (0 \leq x \leq 1) \\ x - 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad \text{이므로,}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

$$f^{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

49. 집합 $X = \{x \mid x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

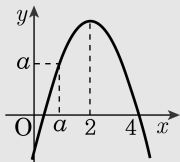
해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) = a$

$$-a^2 + 4a = a \quad \therefore a = 0, 3$$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0



50. 한 학생이 1년 동안 구입한 참고서와 교양서적을 비교하였더니, 1학기에는 1 : 3의 비율로 구입하고 2학기에는 5 : 3의 비율로 구입하여 1년 동안 구입한 비율이 3 : 5이었다. 다음 중 1년 동안 구입한 서적의 수로 볼 수 있는 것은?

① 32권

② 40권

③ 48권

④ 54권

⑤ 64권

해설

	참고서	교양서적
1학기	$\frac{a}{4}$	$\frac{3}{4}a$
2학기	$\frac{5}{8}b$	$\frac{3}{8}b$

1년 동안 구입한 서적 수의 비는

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{5}{8}b\right) : \left(\frac{3}{4}a + \frac{3}{8}b\right) = 3 : 5$$

$$\frac{10a + 25b}{8} = \frac{18a + 9b}{8}, 8a = 16b$$

$$\therefore a = 2b$$

1년 동안 구입한 서적의 수는

$a + b = 3b$ 이고 b 가 8의 배수이므로

$a + b$ 는 24의 배수이다.

따라서 서적의 수로 볼 수 있는 것은 48권이다.