

1. 집합 $A = \{a, \{b, c\}, c\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $\{a, b, c\} \subset A$ ② $\{b, c\} \subset A$ ③ $\{a, c\} \in A$
④ $\{\{b, c\}, c\} \in A$ ⑤ $\emptyset \subset A$

해설

- ① $\{a\{b, c\}\} \subset A$
② $\{b, c\} \in A$
③ $\{a, c\} \subset A$
④ $\{\{b, c\}c\} \subset A$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

1, 4를 뺀 $\{2, 3, 5\}$ 의 진부분집합의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이다.

3. 두 집합 $A = \{1, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\emptyset$

② $\{5\}$

③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 5\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

해설

① $\{1, 7\} \not\subset \emptyset$

② $\{1, 7\} \not\subset \{5\}$

③ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$

④ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3, 5\}$

4. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) = 3$

② $A \subset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(B)$

③ $n(\{2, 3, 5\}) - n(\{10, 11, 12\}) = 0$

④ $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$ 일 때, $x \in A$ 이면 $x \in B$ 이다.

⑤ $\emptyset \in \{\emptyset\}$

해설

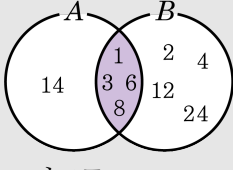
$A \subset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(A)$

또는 $A \supset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(B)$

5. $A = \{1, 3, 6, 8, 14\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하면?
- ① $\{1, 3, 6, 8\}$
- ② $\{1, 3, 6, 8, 12, 24\}$
- ③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 14, 24\}$
- ④ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$
- ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

해설

$A \cup B$ 는 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소로 이루어진 집합이다.
다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.



그러므로 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$ 가 된다.

6. 다음 집합들 중 서로소인 것은?

① $A = \{x \mid x = 2n, n \text{은 자연수}\}, B = \{x \mid x = 2n - 1, n \text{은 자연수}\}$

② $A = \{x \mid x = 6m, m \text{은 정수}\}, B = \{x \mid x = 3m, m \text{은 정수}\}$

③ $A = \{x \mid x \text{는 } x^2 \leq 4 \text{인 정수}\}, B = \{0, 1, 2\}$

④ $A = \{x \mid x \text{는 복소수}\}, B = \{x \mid x \text{는 실수}\}$

⑤ $A = \{x \mid 3 \leq x < 8\}, B = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$

해설

A 는 짝수의 집합, B 는 홀수의 집합을 나타내기 때문에 서로소인 집합이 된다.

7. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$$

②, ③, ④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

8. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
 $\therefore 4^3 = 64$
 $\therefore a + b = 64$

9. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}\end{aligned}$$

10. $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 이므로

점근선 $x=1$ 에서 $y = \frac{ax+1}{x-1}$

점근선 $y=2$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x-1}$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$\therefore a+b=2-1=1$

11. $f(t) = \frac{t}{1-t}$ (단, $t \neq 1$) 인 함수 f 가 있다. $y = f(x)$ 일 때, $x = \square$ 로 나타낼 수 있다. $\square$ 안에 알맞은 것은?

① $-f(y)$

② $-f(-y)$

③ $f(-y)$

④ $f\left(\frac{1}{y}\right)$

⑤ $f(y)$

해설

$$y = f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ 에서}$$

$$y - xy = x, \quad x(1+y) = y$$

$$\therefore x = \frac{y}{1+y} = \frac{-y}{1-(-y)} = -f(-y)$$

12. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$$y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$x = y^2 - 4y + 4 + 1$$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

13. 첫째항이 1, 공비가 8인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 135

해설

$$\begin{aligned} a_n &= 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3} \\ b_n &= \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3} \\ b_n &\text{은 첫째항이 } 0, \text{ 공차가 } 3 \text{인 등차수열} \\ \therefore S_{10} &= \frac{10 \{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\}}{2} \\ &= 5 \cdot 27 = 135 \end{aligned}$$

14. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 짝수 중 8의 약수는 반드시 포함하고, 홀수는 포함하지 않는 부분집합을 골라라.

- ㉠

$\{2, 4, 6, 8\}$
- ㉡

$\{2, 3, 4, 8\}$
- ㉢

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$
- ㉣

$\{2, 4, 6, 8, 9\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이고 이 중에서 짝수인 8의 약수는 2, 4, 8이며, 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이다. ㉡은 3이 포함되어 있고 ㉣은 9가 포함되어 있으므로 조건에 맞지 않는다.

16. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$ 이고, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로
 $(A \cap B) \subset X$
 $A \cap B = \{2, 3\}$
 $\{2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$
 X 는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 3 을 포함하는 집합이다.
집합 X 의 개수 : $2^2 = 4$ 개다.

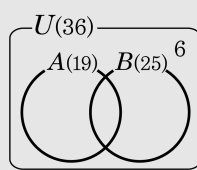
17. 축제에 참여한 36명의 학생 중 합창을 한 학생이 19명, 연극을 한 학생이 25명이다. 두 가지 모두 하지 않은 학생이 6명일 때, 합창은 하지 않고 연극만 한 학생 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 11명

해설

합창을 한 학생의 집합을 A , 연극을 한 학생의 집합을 B 라고 할 때, 주어진 조건을 벤 다이어그램에 그리면 다음과 같다.



연극만 한 학생 수는 $B - (A \cap B)$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 19 + 25 - 30 \\ &= 14(\text{명}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(B - (A \cap B)) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 25 - 14 \\ &= 11(\text{명}) \end{aligned}$$

18. $a \leq x \leq 6$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 필요조건이고, $b \leq x \leq 4$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\{x|2 \leq x \leq 5\} \subset \{x|a \leq x \leq 6\}$
 $\therefore a \leq 2$
 $\{x|b \leq x \leq 4\} \subset \{x|2 \leq x \leq 5\}$
 $\therefore 2 \leq b$
 a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 2
 $\therefore 2 + 2 = 4$

19. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 는 p 의 필요조건, q 는 r 의 충분조건이고 r 는 p 의 충분조건이다. 이 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q 는 p 의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots ㉠$
 q 는 r 의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \dots\dots ㉡$
 r 는 p 의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \dots\dots ㉢$
 $㉠, ㉡$ 에서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r \dots\dots ㉣$
 $㉢, ㉣$ 에서 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로 $r \Leftrightarrow p$ 이다.
 $\therefore$ 필요충분조건

20. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

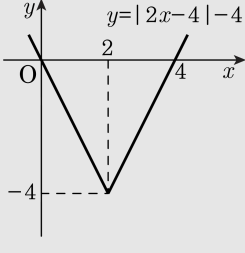
21. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는
 $y = |2x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한
것이므로
다음 그림과 같다.
따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이
는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



22. $\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 실수 a, b, c 의 값을 정하였을 때, abc 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 6
- ④ 12
- ⑤ 24

해설

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$ 을 곱하면

$$4x^2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2 \cdots \textcircled{2}$$

②가 x 에 관한 항등식이므로

$x = 1, -1, 0$ 을 각각 대입하면

$$4 = 2b, \quad 4 = 4c, \quad 0 = -a + b + c$$

$$\therefore a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1$$

$$\therefore abc = 6$$

23. 다음 분수식 $\frac{x^2}{x - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}$

② $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

③ $\frac{x^2 + x + 1}{x}$

④ $\frac{x^2 + 1}{x}$

⑤ $\frac{x^2 - 1}{x}$

해설

$$\frac{x^2}{x - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}} = \frac{x^2}{x - \frac{x}{x^2 + 1}} = \frac{x^2}{\frac{x^3}{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

24. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9\end{aligned}$$

25. 함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 (1,2)를 지나고 $x = 3$, $y = 1$ 을 점근선으로 할 때, 상수 a, b, c 에 대해서 $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점근선이 $x = 3$, $y = 1$ 이므로
 $a = -3$, $b = 1$ 이다.

그리고 점 (1,2)를 지나므로,

$$2 = \frac{1+c}{1-3}, c = -5$$

$$\therefore a - b - c = 1$$

26. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

27. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면
 $a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$
 $\therefore a_n = 6 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 8$
이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로
 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$
 $= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$
 $= 2 \cdot \frac{4(6 + 0)}{2} - \frac{20(6 - 32)}{2} (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$
 $= 24 + 260 = 284$

28. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때, 수열 $\{3a_{n+1} - 2a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\{3a_{n+1} - 2a_n\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$$

$$= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$$

따라서 $r = 2$ 이고 $3ar - 2a = 12$ 이다.

$$6a - 2a = 12, 4a = 12$$

$$\therefore a = 3$$

29. 8과 27사이에 두 수 x, y 를 넣었더니 8, $x, y, 27$ 이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, $x, y, 27$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 8$$

$$a_4 = a_1 r^3 = 27, \quad 8r^3 = 27$$

$$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

$$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$$

30. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n} = 7$ 일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1 이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} = 7, \frac{r^{3n}-1}{r^n-1} = 7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1} = 7, r^{2n}+r^n+1 = 7$$

$$(r^n)^2+r^n-6 = 0, (r^n+3)(r^n-2) = 0$$

$$\therefore r^n = 2 (\because r > 1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} = \frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1} = r^n+1 = 3$$

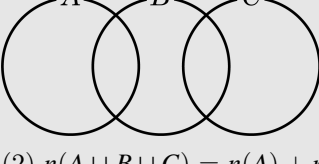
31. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 21$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cap C) = 5$, $n(C \cap A) = 0$, $n(A \cup B \cup C) = 30$ 일 때, 집합 C 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 32 개

해설

(1) $n(A \cap C) = 0$ 에서 $A \cap C = \emptyset$ 이므로 세 집합 A, B, C 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



(2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$ 이므로

$$30 = 21 + 13 + n(C) - 4 - 5$$

$$\therefore n(C) = 30 - (21 + 13 - 4 - 5)$$

$$= 30 - 25$$

$$= 5$$

(3) 따라서 집합 C 의 부분집합의 개수는

$$\therefore 2^5 = 32(\text{개})$$

32. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(A \cup B) \supset A$

② $A - B = A \cap B^C$

③ $\emptyset^C = U$

④ $A - B = B - A$

⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

해설

$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ 이면

$A - B = \{1\}, B - A = \{3\}$

$\therefore A - B \neq B - A$

33. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ?
- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
 - ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
 - ③ 겨울이 오면 눈이 온다.
 - ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
 - ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.
라 하면 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이다.
① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
③ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

34. 다음은 명제 ‘ xy 가 3의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)’가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘ x, y 가 모두 (가)가 아니면 xy 는 (가)가 아니다.’이다. 이것이 참임을 보이자.
 x, y 가 모두 (나)가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1, y = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
이때, (다) $= (3m \pm 1)(3n \pm 1)$
 $= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1$
 $= 3(3mn \pm m \pm n) + 1$
또는 (다) $= (3m \pm 1)(3n \mp 1)$
 $= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1$
 $= 3(3mn \mp m \pm n) - 1$
이다. 그리고 m, n 이 정수이므로
 $3mn \pm m \pm n, 3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.
따라서, (다)는 3의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
그러므로 주어진 명제는 (마)이다.

- ① (가) 3의 배수 ② (나) 3의 배수 ③ (다) xy
- ④ (라) 참 ⑤ (마) 거짓

해설

대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

35. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의
치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

① -1

② -2

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

36. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

- ㉠ -3 ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ 0 ㉣ $\frac{1}{3}$ ㉤ 3

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$ 이다.
 $x = 1, y = -1$ 을 대입하면
 $f(0) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1) = 0$
 $f(-1) = -f(1), f(1) = 3$ 이므로
 $\therefore f(-1) = -3$

37. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3} = t$ 로 놓으면

$2x-1 = 3t$ 이므로 $x = \frac{3t+1}{2}$

$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$

$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$

38. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 $S_n = 2^{n+1} - 3(n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 의 값은?

① $\frac{2^{20}}{5}$

② $\frac{2^{21} + 5}{4}$

③ $\frac{2^{21} - 5}{3}$

④ 2^{20}

⑤ $2^{21} - 5$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2) \\ S_1 &= 2^2 - 3 = 1 \text{ 이므로} \\ \therefore a_n &= 2^n (n \geq 2), a_1 = 1 \\ a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} &= 1 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{19} \\ &= 1 + \frac{2^3 \{(2^2)^9 - 1\}}{4 - 1} \\ &= 1 + \frac{2^{21}}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2^{21}}{3} \end{aligned}$$

39. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = 2n$ 일 때, 새로운 수열 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 만들었다.
- $$b_n = \left\lfloor \frac{a_n}{10} \right\rfloor$$
- 이때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제100항 까지의 합을 구하여라.(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 970

해설

$a_n = 2n$ 일 때, 수열 $\{b_n\}$ 을 구해 보면 $b_n = \left\lfloor \frac{a_n}{10} \right\rfloor$ 에서
 $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 0,$
 $b_5 = 1, b_6 = 1, b_7 = 1, b_8 = 1, b_9 = 1$
 $b_{10} = 2, b_{11} = 2, b_{12} = 2, b_{13} = 2, b_{14} = 2,$
 $\vdots$
 $b_{95} = 19, b_{96} = 19, b_{97} = 19, b_{98} = 19, b_{99} = 19,$
 $b_{100} = 20$
따라서 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합은
 $5(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) + 20 = 5 \times \frac{19(1 + 19)}{2} + 20$
 $= 970$

40. 자연수 전체 집합의 부분집합 A 가 두 조건

- ㉠ $1 \in A, 2 \in A$
- ㉡ $a \in A, b \in A$ 이면 $a + b + ab \in A$

을 만족할 때, 다음 중 반드시 집합 A 의 원소라 할 수 없는 것은?

- ① $2^2 - 1$
- ② $3^3 - 1$
- ③ $4^4 - 1$
- ④ $5^5 - 1$
- ⑤ $6^6 - 1$

해설

$a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1 \cdots$ ㉠ 이므로
 $1 \in A, 2 \in B$ 에서 $(1 + 1)(2 + 1) - 1 = 2 \cdot 3 - 1 \in A$
 $a = 1, b = 2 \cdot 3 - 1$ 로 놓으면
㉡에서 $(1 + 1)(2 \cdot 3 - 1 + 1) - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 2^2 \cdot 3 - 1 \in A$
 $a = 2, b = 2 \cdot 3 - 1$ 로 놓으면
㉡에서 $(2 + 1)(2 \cdot 3 - 1 + 1) - 1 = 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 2 \cdot 3^2 - 1 \in A$
이 과정을 반복하면 일반적으로
 $2^m \cdot 3^n - 1 \in A$ 이면 $2^{m+1} \cdot 3^{n+1} - 1 \in A$ (m, n 은 음이 아닌 정수)
따라서, A 의 임의의 원소는 $2^m \cdot 3^n - 1$ 의 꼴이다.

41. 집합 $A = \{\emptyset, 0, 1, \{0\}, \{1\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset \in A$

② $\emptyset \subset A$

③ $\{\emptyset\} \subset A$

④ $\{0, 1\} \in A$

⑤ $\{\{0\}, 0\} \subset A$

해설

① 집합 A 에 속에 있는 $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이다.

② 공집합 $\emptyset$ 는 모든 집합의 부분집합이다.

③ $\{\emptyset\} \subset A$

④ $\{0, 1\} \subset A$

42. x, y, z 가 양의 실수일 때 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}\right)$ 의 최솟값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 식을 전개하면

$$1 + \frac{x+y}{z} + \frac{z}{x+y} + 1$$

$$= 2 + \frac{x+y}{z} + \frac{z}{x+y} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{x+y}{z} \times \frac{z}{x+y}}$$

$$= 4$$