

1. 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\emptyset \in A$

㉡ $\emptyset \subset A$

㉢ $\{1\} \in A$

㉣ $\{1, 2\} \subset A$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 공집합은 집합 A 의 원소이다.

㉡ 공집합은 집합 A 의 부분집합이다.

㉣ 1, 2를 포함한 집합은 부분집합도 되고 원소도 된다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

1, 4를 뺀 $\{2, 3, 5\}$ 의 진부분집합의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이다.

3. $X = \{x \mid x \text{는 } 10\text{이하의 자연수}\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 $f(x) = (x \text{의 양의 약수의 갯수})$ 로 정의할 때, 함수 f 의 치역의 원소의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, f(2) = f(3) = f(5) = f(7) = 2, \\ f(4) &= f(9) = 3 \\ f(6) &= f(8) = f(10) = 4 \\ \therefore f(X) &= \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
 $g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

5. 분수함수 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x = a$, $y = b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \frac{2x-1}{x-1} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{x-1}$ 이므로,
점근선은 $y = 2$, $x = 1$ 이다.
 $\therefore a + b = 3$

6. 곡선 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x = a$, $y = b$ 이다. $m + n + a + b$ 의 값은?

① 6 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$y = \frac{6}{x} \text{ 의 그래프를}$$

x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{따라서 } m = 3, n = 1$$

$$\text{또, } y = \frac{3x-1}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

$$\text{점근선은 } x = -1, y = 3 \quad a = -1, b = 3$$

따라서 구하는 합은 6

7. 집합 $A = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{4\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \in A$

② $3 \notin A$

③ $4 \notin A$

④ $\{4\} \in A$

⑤ $\{2, 3\} \in A$

해설

집합 A 의 원소들은 1, 2, 3, $\{2, 3\}$, $\{4\}$ 이다.

옳은 것은 ①,③,④,⑤ 이다.

② $3 \notin A$ 은 $3 \in A$ 가 맞다.

8. 집합 $A = \{2, 4, 8, 16, 22\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 4의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 12개 ② 24개 ③ 28개 ④ 34개 ⑤ 36개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 4의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 22로 만든 부분집합이므로 $2^2 = 4$ (개) 이다.
 $\therefore 32 - 4 = 28$ (개)

9. 두 집합 $A = \{2, 4, a-1\}$, $B = \{a-8, a-3, b+2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 9\}$ 일 때, 집합 A 와 집합 B 의 합집합은?

① $\{2, 4, 8\}$

② $\{2, 4, 7, 9\}$

③ $\{2, 4, 8, 9\}$

④ $\{2, 4, 7, 8, 9\}$

⑤ $\{2, 4, 7, 9, 11\}$

해설

$A \cap B = \{2, 9\}$ 이므로 $9 \in A$
 $a-1=9 \therefore a=10$
 $a=10$ 이므로 $B = \{2, 7, b+2\}$
 $9 \in B$ 이므로 $b+2=9 \therefore b=7$
 $A = \{2, 4, 9\}$, $B = \{2, 7, 9\}$ 이므로
 $A \cup B = \{2, 4, 7, 9\}$

10. $x > 0, y > 0, x + 2y = 1$ 일 때, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}, \frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}, \frac{1}{8} \geq xy$$

즉 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} \text{ 이므로 } xy = \frac{1}{8} \text{ 일 때 최소}$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$$

해설

$$x + 2y = 1 \text{ 이면 } y = \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x(1-x)}$$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -x^2 + x = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\therefore x(1-x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고

$$\text{이때 } \frac{2}{x(1-x)} \text{ 의 최솟값은 } \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

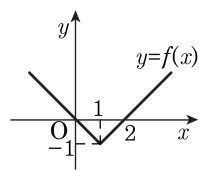
11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x \text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x \text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f)(3)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(-3+5) \\ &= f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

12. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)$ 는?



- ① $f(x) = |x + 1| + 1$ ② $f(x) = |x + 1| - 1$
③ $f(x) = |x - 1| + 1$ ④ $f(x) = |x - 1| - 1$
⑤ $f(x) = -|x - 1| + 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = |x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = |x|$ 에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y + 1$ 을 대입하면

$$y + 1 = |x - 1|$$

$$y = |x - 1| - 1$$

$$\therefore f(x) = |x - 1| - 1$$

13. 등식 $\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} \text{ 에서}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a = 2 \text{ 이고 } \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이 때, } b + \frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{ 이므로 } b = 1, c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

14. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B} : 3x = z$$

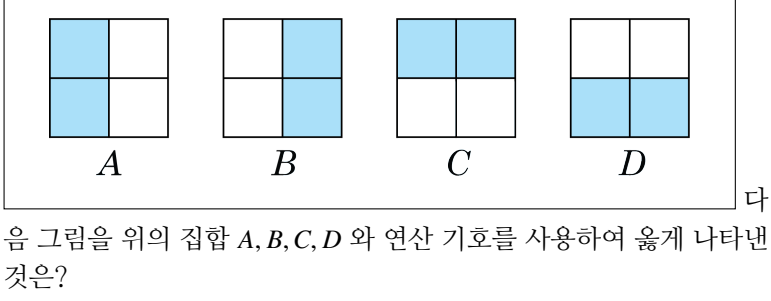
$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

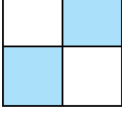
$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

15. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 나타낸 것은?



- ① $(A - B) \cup (B - A)$

② $(A \cup B) - (B \cap C)$

③ $(B - C) \cup (C - B)$

④ $(A \cup C) - (A \cap C)$

⑤ $(B - C) \cup (C - B)$

해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 ④ $(A \cup C) - (A \cap C)$ 이다.

16. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은?

- ① $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$
- ② $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x + 3 = 0$
- ③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$
- ④ $p : a^2 = ab, q : a = b$
- ⑤ $p : |a| < |b|, q : a < b$

해설

- $p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 $P \subset$ 진리집합 Q)
- ① $P : x = 1, y = 1, Q : x = 1 \wedge y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건
 - ② $P : x = 3$ 또는 $x = -1, Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소
 - ③ $P : a > 3, Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
 - ④ $P : a = 0$ 또는 $a = b, Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
 - ⑤ $p \not\rightarrow q, q \rightarrow p$ (반례: $a = 2, b = -3$)

17. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

- ① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

해설

B($a, 0$), C($0, b$)이므로
 $\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$\therefore S \geq 4$

18. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

① $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

② $\frac{\sqrt{5}-1}{12}$

③ $\frac{10-\sqrt{2}}{20}$

④ $\frac{16-\sqrt{5}}{30}$

⑤ $\frac{\sqrt{30}-1}{2}$

해설

$\sqrt{2} = \sqrt{1} \times \sqrt{2}$, $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, ..., $\sqrt{30} = \sqrt{5} \times \sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5} \times \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} = \frac{6-\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

19. 전체집합 $U = \{1, 2\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = A$ 인 두 집합 A, B 는 모두 몇 쌍인지 구하여라.

▶ 답: 쌍

▶ 정답 : 9쌍

해설

$A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 이다.

집합 U 의 부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\},$

$A = \emptyset$ 일 때, B 는 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ 로 4쌍이 될 수 있다.

$A = \{1\}$ 일 때, B 는 $\{1\}, \{1, 2\}$ 로 2 쌍이 될 수 있다.

$A = \{2\}$ 일 때, B 는 $\{2\}, \{1, 2\}$ 로 2 쌍이 될 수 있다.

$A = \{1, 2\}$ 일 때, B 는 $\{1, 2\}$ 이므로 1 쌍이 될 수 있다.

$$\therefore 4 + 2 + 2 + 1 = 9(\text{쌍})$$

20. 집합 $S = \{x \mid x < 100, x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족할 때 A^c 의 원소 중 가장 큰 수를 구하여라.

- (ㄱ) $4 \in A, 5 \in A$
(ㄴ) $p \in A, q \in A$ 이면 $p + q \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

4, 5는 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해 보면
4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, $\dots$, 99이다.
따라서 $A^c = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ 이고,
 A^c 에서 가장 큰 원소는 11이다.