

1. 10의 약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $1 \in A$ ② $3 \in A$ ③ $4 \notin A$ ④ $5 \in A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 1, 2, 5, 10 이므로 3, 4, 6은 집합 A 의 원소가 아니다. 따라서

② $3 \notin A$

⑤ $6 \notin A$ 이다.

2. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

$A = \{1, 2, a, 7, b\}$ 에 대하여 $\{1, 3\}$ 과 $\{1, 2, 7, 9\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다. $B = \{1, 2, 3, c, 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다.

▶ 답 :

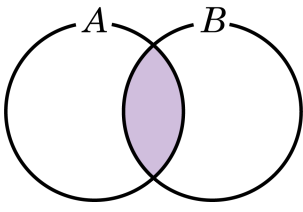
▷ 정답 : 19

해설

$\{1, 3\}$ 과 $\{1, 2, 7, 9\}$ 가 집합 A 의 부분집합이므로 집합 $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$ 또는 $a = 9, b = 3$ 이다. 따라서 $a = 3, b = 9$ 이다. 또한, $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 를 의미하므로 $c = 7$ 이다.

$\therefore a + b + c = 3 + 9 + 7 = 19$

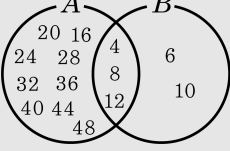
3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 48 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ 일 때, 다음과 같은 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{4, 8, 10\}$ ② $\{4, 6, 8\}$ ③ $\{4, 6, 12\}$
④ $\{4, 8, 12\}$ ⑤ $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{4, 8, 12\}$ 이다.

4. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0, q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

5. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

6. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} (\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c} = -\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 2k, \quad b = 3k, \quad c = 4k$$

$$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c} = \frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k} = \frac{-k}{13k} = -\frac{1}{13}$$

$$\therefore p = 13, q = 1 \quad p+q = 14$$

7. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ 이고, 두 부분집합 $A = \{a, c, d, e, h\}$, $B = \{b, f, h\}$ 일 때, $A^c \cap B$ 는?

① $\{b\}$ ② $\{f\}$ ③ $\{b, f\}$ ④ $\{h\}$ ⑤ $\{b, h\}$

해설

$$\begin{aligned} A^c &= \{b, f, g\} \\ B &= \{b, f, h\} \\ A^c \cap B &= \{b, f\} \end{aligned}$$

8. 전체집합이 U 이고, A 가 U 의 부분집합일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 골라라.

- ☐ $A \cap A^c = \emptyset$

☐ $A \cup A^c = U$

☐ $U^c = \emptyset$

☐ $(A^c)^c = A$

☐ $U - A = \emptyset$

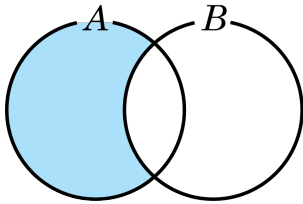
▶ 답 :

▷ 정답 : ☐

해설

☐ $U - A = A^c$

9. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합이 아닌 것을 모두 고르면?(정답 2개)



① $A \cap B^c$

② $A - B$

③ $(A \cup B) - A$

④ $A - (A \cup B)$

⑤ $\{x|x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B^c \\ &= (A \cup B) - B \\ &= A - (A \cap B) \\ &= \{x|x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\} \end{aligned}$$

이므로 ③, ④이다.

10. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

11. $f(x) = x^2 + 1 (x \geq 0)$, $g(x) = x^2 - 6x + 10 (x \geq 3)$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 6 ③ 4 ④ 3 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f \\ \therefore (g^{-1} \circ f)(3) &= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(10) \\ g^{-1}(10) &= k \text{ 라 하면, } g(k) = 10 \text{ 이다.} \\ \therefore k^2 - 6k + 10 &= 10 \\ \therefore k &= 6 \quad (\because k \geq 3)\end{aligned}$$

12. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{2}{5}$
- ③ $-\frac{1}{5}$
- ④ $-\frac{2}{5}$
- ⑤ 1

해설

$y = m|x - 1| + 2$
i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{1}$
ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{2}$
 m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{1}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

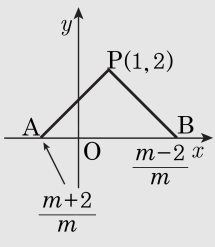
$$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$$

$$10m = -4$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



해설

삼각형의 넓이가 10 일 때 높이가 2이므로

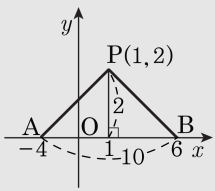
$$\overline{AB} = 10$$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 (6, 0)을 대입하면

$$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



13. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1 \end{aligned}$$

14. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

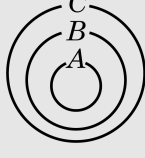
$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9\end{aligned}$$

15. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

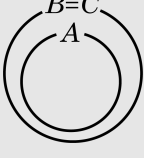
- ① $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ② $A \subset B, B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ③ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.
- ④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.
- ⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

①



②



③ 예를 들면 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\}$ 이면, $A \subset B, B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

16. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \end{aligned}$$

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x = y = z =$ (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$

② $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$

③ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$

④ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{조건에서 } x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \text{ 이므로} \\ P^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\ &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3) \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 $(\sqrt{3})$ 이고,

등호는 $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로 $x = y = z$ 이면 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

17. 두 일차함수가 $f(x) = ax + 2$, $g(x) = bx + c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2) = 3$, $(g \circ f)(x) = 3x - 2$ 를 만족하는 a 의 값은?

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(x) = ax + 2$, $g(x) = bx + c$ 에서
 $g^{-1}(2) = 3$ 이면 $g(3) = 2$ 이므로
 $3b + c = 2 \cdots \textcircled{1}$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = b(ax + 2) + c$
 $= abx + 2b + c = 3x - 2$
 $\therefore ab = 3 \cdots \textcircled{2}$
 $2b + c = -2 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{3}$ 하면
 $b = 4$, $c = -10$, $a = \frac{3}{4}$

해설

$g^{-1}(2) = 3 \Leftrightarrow g(3) = 2$
 $(g \circ f)(x) = 3x - 2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 3x - 2$
 $f(x) = ax + 2$ 에서 $f(k) = ak + 2 = 3 \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면
 $g(3) = g(f(k)) = 3k - 2 = 2$, $k = \frac{4}{3}$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\frac{4}{3}a + 2 = 3$
 $\therefore a = \frac{3}{4}$

18. $y = \sqrt{x+2}$ 와 $x = \sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ $\frac{7}{5}$

해설

두 곡선은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+2}$ 와 $y = x$ 와의
교점이다.

$$\sqrt{x+2} = x \text{ 에서 } x^2 = x+2$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore P(a, b) = P(2, 2)$$

($\therefore P(a, b)$ 는 제 1 사분면에 존재한다.)

19. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 로 정의할 때, $(A \times B) \cup (B \times A)$ 의 원소의 개수는?

- ① 12 개 ② 16 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 28 개

해설

$A \times B$ 는 $a \in A, b \in B$ 인 모든 순서쌍 (a, b) 로 이루어지므로
 $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$
 $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
 $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
따라서, $n(A \times B) = 12$, $n(B \times A) = 12$, $n((A \times B) \cap (B \times A)) = 4$
이므로
 $n((A \times B) \cup (B \times A)) = n(A \times B) + n(B \times A) - n((A \times B) \cap (B \times A))$
 $= 12 + 12 - 4 = 20$

20. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 다음 두 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하여라.

(i) $f : X \rightarrow Y$ 는 일대일 함수
(ii) $x \neq y$ 인 X 의 원소 x, y 에 대해
 $f(xy) = f(x)f(y)$

▶ 답: 개

▷ 정답 : 4개

해설

조건 (ii)에서 나타날 수 있는 경우는

$$f(0 \cdot 1) = f(0) = f(0) \cdot f(1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(0 \cdot 2) = f(0) = f(0) \cdot f(2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(1 \cdot 2) = f(2) = f(1) \cdot f(2) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f(0) \{f(1) - f(2)\} = 0$ 이고

조건 (i)로 부터 $f(0) = 0$ 이고

$\textcircled{3}$ 에서 $f(2) \{f(1) - 1\} = 0$

$f(2) \neq 0$ 이므로 $f(1) = 1, f(2) = 2, 3,$

함수의 개수는 4 개