1. 10 의 약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $1 \in A$ ② $3 \in A$ ③ $4 \notin A$ ④ $5 \in A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 1, 2, 5, 10 이므로 3, 4, 6 은 집합 A 의 원소가 아니다. 따라서

② $3 \notin A$

⑤ $6 \notin A$ 이다.

2. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

> $A = \{1, 2, a, 7, b\}$ 에 대하여 $\{1, 3\}$ 과 $\{1, 2, 7, 9\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다. $B = \{1, 2, 3, c, 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다.

▶ 답 :

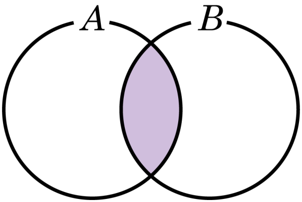
▷ 정답 : 19

해설

$\{1, 3\}$ 과 $\{1, 2, 7, 9\}$ 가 집합 A 의 부분집합이므로 집합 $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$ 또는 $a = 9$, $b = 3$ 이다. 따라서 $a = 3, b = 9$ 이다. 또한, $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 를 의미하므로 $c = 7$ 이다.

$\therefore\ a+b+c = 3+9+7 = 19$

3. 집합 $A = \{x \mid x$는 48 이하의 4의 배수$\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ 일 때, 다음과 같은 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

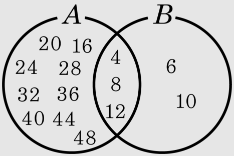


① $\{4, 8, 10\}$ ② $\{4, 6, 8\}$ ③ $\{4, 6, 12\}$

④ $\{4, 8, 12\}$ ⑤ $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{4, 8, 12\}$ 이다.

4. $q > p > 1$인 실수 $p,\ q$에 대하여 $pq+p$와 p^2+q의 대소를 비교하면?

① $pq+p < p^2+q$　　② $pq+p \le p^2+q$

③ $pq+p > p^2+q$　　④ $pq+p \ge p^2+q$

⑤ $pq+p = p^2+q$

해설

$$\begin{aligned}(pq+p)-(p^2+q) &= pq-q-p^2+p \\ &= q(p-1)-p(p-1) \\ &= (p-1)(q-p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$이므로 $p-1>0,\ q-p>0$
따라서 $(p-1)(q-p)>0$이므로
$pq+p > p^2+q$

5. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6　② -3　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$이므로 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

6. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}(\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c}=-\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.(단, p, q 는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq 0)$ 로 놓으면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c}=\frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k}=\frac{-k}{13k}=-\frac{1}{13}$

$\therefore p=13, q=1\quad p+q=14$

7. 전체집합 $U = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$ 이고, 두 부분집합 $A = \{a,\ c,\ d,\ e,\ h\}$,
$B = \{b,\ f,\ h\}$ 일 때, $A^c \cap B$는?

① $\{b\}$　② $\{f\}$　③ $\{b,\ f\}$　④ $\{h\}$　⑤ $\{b,\ h\}$

해설

$A^c = \{b,\ f,\ g\}$

$B = \{b,\ f,\ h\}$

$A^c \cap B = \{b,\ f\}$

8. 전체집합이 U 이고, A 가 U 의 부분집합일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

㉠ $A \cap A^C = \varnothing$	㉡ $A \cup A^C = U$
㉢ $U^c = \varnothing$	㉣ $(A^c)^c = A$
㉤ $U - A = \varnothing$	

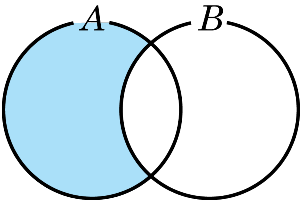
▶ **답 :**

▷ **정답 :** ㉤

해설

㉤ $U - A = A^c$

9. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합이 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면?(정답 2개)



① $A \cap B^c$

② $A - B$

③ $(A \cup B) - A$

④ $A - (A \cup B)$

⑤ $\{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B^C \\ &= (A \cup B) - B \\ &= A - (A \cap B) \\ &= \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\} \end{aligned}$$

이므로 ③, ④이다.

10. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

11. $f(x) = x^2 + 1(x \geq 0)$, $g(x) = x^2 - 6x + 10(x \geq 3)$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 6 ③ 4 ④ 3 ⑤ 0

해설

$(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$

$\therefore\ (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(10)$

$g^{-1}(10) = k$ 라 하면, $g(k) = 10$ 이다.

$\therefore\ k^2 - 6k + 10 = 10$

$\therefore\ k = 6 \ \ (\because\ k \geq 3)$

12. 직선 $y = m\,|\,x-1\,|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

해설

$y = m\,|\,x-1\,|+2$

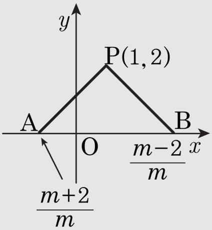
ⅰ) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ⅱ) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x절편은 ㉠에서 $x = \dfrac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \dfrac{m+2}{m}$



그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

$\dfrac{m-2}{m} - \dfrac{m+2}{m} = \dfrac{-4}{m}$

$\therefore$ △PAB의 면적이 10이므로

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\dfrac{2}{5}$

해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

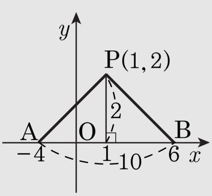
$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m\,|\,x-1\,|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m\,|\,6-1\,|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\dfrac{2}{5}$



13. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

14. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때, $\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\\ &\quad(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\\ &= \sqrt{100}-1=10-1=9\end{aligned}$$

15. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

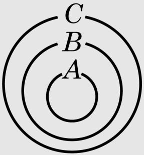
② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

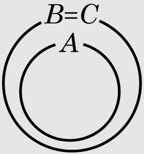
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

① 

② 

③ 예를 들면 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ 이면, $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

16. 다음은 양수 $x,\ y,\ z$가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{3}$ ② $9,\ 3,\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ $3,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{3}$
④ $3,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

17. 두 일차함수가 $f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2)=3$, $(g\circ f)(x)=3x-2$ 를 만족하는 a 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 에서

$g^{-1}(2)=3$ 이면 $g(3)=2$ 이므로

$3b+c=2\cdots$ ㉠

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=b(ax+2)+c$

$=abx+2b+c=3x-2$

$\therefore\ ab=3\cdots$ ㉡

$2b+c=-2\cdots$ ㉢

㉠ − ㉢ 하면

$b=4,\ c=-10,\ a=\frac{3}{4}$

해설

$g^{-1}(2)=3\Leftrightarrow g(3)=2$

$(g\circ f)(x)=3x-2\Leftrightarrow g(f(x))=3x-2$

$f(x)=ax+2$ 에서 $f(k)=ak+2=3\cdots$ ㉠ 이라 하면

$g(3)=g(f(k))=3k-2=2$, $k=\frac{4}{3}$

㉠ 에 대입하면 $\frac{4}{3}a+2=3$

$\therefore\ a=\frac{3}{4}$

18. $y = \sqrt{x+2}$ 와 $x = \sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 P $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ $\frac{7}{5}$

해설

두 곡선은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+2}$ 와 $y = x$와의 교점이다.

$\sqrt{x+2} = x$ 에서 $x^2 = x+2$

$\therefore\ x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$에서

$x = -1$ 또는 $x = 2$

$\therefore \mathrm{P}(a,\ b) = \mathrm{P}(2,\ 2)$

($\because \mathrm{P}(a,\ b)$는 제 1 사분면에 존재한다.)

19. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A\times B=\{(a,\ b)|a\in A,\ b\in B\}$ 로 정의할 때, $(A\times B)\cup(B\times A)$ 의 원소의 개수는?

① 12 개　　② 16 개　　③ 20 개　　④ 24 개　　⑤ 28 개

해설

$A\times B$는 $a\in A,\ b\in B$인 모든 순서쌍 $(a,\ b)$로 이루어지므로
$A\times B=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5)\}$
$B\times A=\{(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3)\}$
$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3)\}$
따라서, $n(A\times B)=12,\ n(B\times A)=12,\ n((A\times B)\cap(B\times A))=4$ 이므로
$n((A\times B)\cup(B\times A))=n(A\times B)+n(B\times A)-n((A\times B)\cap(B\times A))$
$=12+12-4=20$

20. 두 집합 $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{0,1,2,3,4,5\}$에서 다음 두 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하여라.

> (ⅰ) $f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 는 일대일 함수
> (ⅱ) $x\neq y$ 인 X 의 원소 x,y 에 대해
> $f(xy)=f(x)f(y)$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

조건 (ⅱ)에서 나타날 수 있는 경우는

$f(0\cdot 1)=f(0)=f(0)\cdot f(1)\quad \cdots$ ㉠

$f(0\cdot 2)=f(0)=f(0)\cdot f(2)\quad \cdots$ ㉡

$f(1\cdot 2)=f(2)=f(1)\cdot f(2)\quad \cdots$ ㉢

㉠, ㉡에서 $f(0)\{f(1)-f(2)\}=0$ 이고

조건 (ⅰ)로 부터 $f(0)=0$ 이고

㉢에서 $f(2)\{f(1)-1\}=0$

$f(2)\neq 0$ 이므로 $f(1)=1$, $f(2)=2,3,4,5$ 가 될 수 있으므로

함수의 개수는 4 개