1. 집합 $A=\{4,6,8\}$ 의 부분집합 중 원소 6 을 반드시 포함하고 원소의 개수가 3 개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

원소 6 를 제외한 $\{4,\ 8\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{4,\ 8\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 6 을 반드시 포함하는 집합 $A=\{4,6,8\}$ 의 부분집합에는 $\{6\}, \{4,\ 6\}, \{6,\ 8\}, \{4,\ 6,\ 8\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 3 개인 것은 $\{4,\ 6,\ 8\}$ 이므로 원소의 합은 $4+6+8=18$ 이다.

2. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$ ② $ab \geq 0$ ③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

3. $x > 0, y > 0$일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20 + 3 \times 4 = 32$

4. $X=\{x\mid -2\le x\le 2\}$, $Y=\{y\mid -3\le y\le 3\}$ 에서 $f\ :\ X\to Y,\ f(x)=ax+b$ (단, $a>0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정하면?

① $a=\dfrac{3}{2},\ b=0$ ② $a=\dfrac{1}{2},\ b=0$ ③ $a=\dfrac{3}{2},\ b=1$
④ $a=\dfrac{5}{2},\ b=0$ ⑤ $a=2,\ b=0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2)=-2a+b=-3 \\ f(2)=2a+b=3 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=0$$

5. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$

$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$a = -2, b = 2$

$\therefore ab = -4$

6. $2x = 3y = 4z$일 때, $\dfrac{x^2 - y^2 - z^2}{xy - yz - zx}$의 값은?

① 6　② $-\dfrac{6}{11}$　③ $\dfrac{6}{11}$　④ $-\dfrac{11}{6}$　⑤ $\dfrac{11}{6}$

해설

$2x = 3y = 4z = k(k \neq 0) \Rightarrow x = \dfrac{k}{2},\ y = \dfrac{k}{3},\ z = \dfrac{k}{4}$

$$\frac{\dfrac{k^2}{4} - \dfrac{k^2}{9} - \dfrac{k^2}{16}}{\dfrac{k^2}{6} - \dfrac{k^2}{12} - \dfrac{k^2}{8}} = \frac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16}}{\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{8}} = -\frac{11}{6}$$

7. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$　③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x+y}{xy}}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$$\therefore \ (\text{주어진 식}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

8. 함수 $y=\frac{x+3}{x-3}$ 은 $y=\frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$y=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$

$y=\frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

$m+n=4$

9. 두 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \to r$ ② $p \to r$ ③ $\sim q \to \sim p$

④ $r \to p$ ⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to q(T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\,(T)$, $\sim r \to \sim q\,(T) \Rightarrow q \to r\,(T)$

$\therefore\ p \to q \to r\,(T) \Rightarrow p \to r\,(T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\,(T)$

10. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

11. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$　② $5+5\sqrt{2}$　③ 25
④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$　⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b라 하면
$a^2+b^2=25$이고
$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$
$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$이므로
삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이고
$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$일 때
둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

12. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$$y=\frac{1}{4}(5-3x)$$

$$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$$

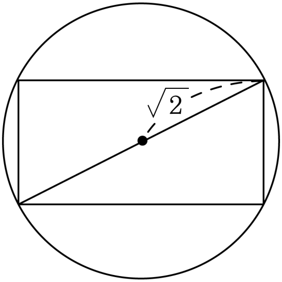
$$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$$

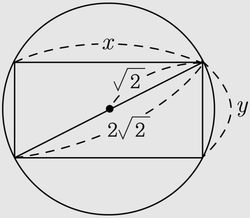
$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$$

13. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

14. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)

④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라 하면

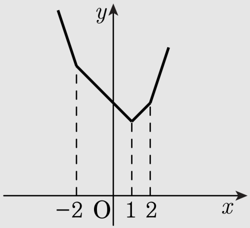
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$

$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의

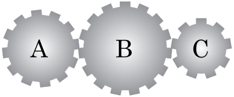
그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 P(1) 이다.



15. 톱니의 개수가 각각 x, y, z 개인 기어 A, B, C 가 그림과 같이 물려 돌아가고 있을 때, A, B, C 의 각 속도의 비는?



① $x : y : z$
② $z : y : x$
③ $y : z : x$
④ $yz : xz : xy$
⑤ $xz : yx : zy$

해설

일정한 시간에 물려 돌아간 톱니의 개수는 같다. 톱니의 개수가 많을수록 회전 속도 즉, 각 속도는 느리다. 따라서 톱니의 개수와 각 속도는 반비례한다.

$\therefore \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = yz : xz : xy$

16. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1 + x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1 - x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2 + 4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a + 2 > 0,\ a - 2 < 0$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}$$

$\therefore\ a = 0$ 일 때 최댓값 2

17. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1,\ 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y=\dfrac{k}{x-2}+1\cdots$①

①이 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0=-k+1\ \therefore\ k=1$

$y=\dfrac{1+x-2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-2}$

$\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=-2$

따라서 $abc=2$

18. 집합 $A=\{1,2\}$ 의 모든 부분집합의 집합을 2^A 라 할 때 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ $A \in 2^A$	㉡ $A \subset 2^A$
㉢ $\varnothing \in 2^A$	㉣ $\varnothing \subset 2^A$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉣, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$A=\{1,2\}$ 의 부분집합을 모두 구하면

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$

따라서 이들을 원소로 하는 집합

$2^A=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$

따라서 $\{1,2\}=A \in 2^A$ 이므로 ㉠는 참

A는 2^A 의 원소이므로 ㉡는 거짓

공집합 $\varnothing$는 2^A 의 원소이므로 $\varnothing \in A$

따라서 ㉢는 참.

공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

따라서 ㉣는 참.

이상에서 참인 것을 모두 고르면 ㉠, ㉢, ㉣

19. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

$$A \subset B,\ B \subset D,\ C \subset D,\ D \subset E$$

① 집합 A 는 집합 E 의 부분집합이다.

② 집합 B 는 집합 E 의 부분집합이다.

③ 집합 C 는 집합 E 의 부분집합이다.

④ 집합 B 는 집합 C 의 부분집합이다.

⑤ $D \subset C$ 이면, $A \subset C$ 이다.

해설

④ 집합 B 가 집합 C 의 부분집합인지는 주어진 조건만으로 알 수 없다.

20. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A=\{a^2-2a-1, 3\}$, $B=\{2, 4-a, 2a^2-a\}$ 에 대하여 $B-A^c=\{2\}$ 일 때, $A\cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

① 10 ② 16 ③ 21 ④ 25 ⑤ 30

해설

$B-A^c=B\cap(A^c)^c=B\cap A=\{2\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 2가 들어있다.
따라서 $a^2-2a-1=2$, $a^2-2a-3=0$
$\therefore a=-1, a=3$ 이다.
i) $a=-1$ 일 때, $A=\{2,3\}$, $B=\{2,3,5\}$
$\therefore A\cap B=\{2,3\}$ 이므로 부적당
i) $a=3$ 일 때, $A=\{2,3\}$, $B=\{1,2,15\}$
$A\cap B=\{2\}$ 이고, 이 때 $A\cup B=\{1,2,3,15\}$
따라서 $A\cup B$ 의 모든 원소의 합은 21 이다.

21. 함수 $f_n(x)$ (n 은 자연수)는 보기의 두 조건을 만족한다.

보기

㉠ $f_1(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$

㉡ $f_n(x) = (f_{n-1} \circ f_1)(x)(n = 2, 3, 4, \cdots)$

이 때, $f_{2007}(2)$ 의 값은? (단, $x \neq -1$)

① $\dfrac{1}{3}$ ② 2 ③ $\dfrac{1}{5}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{5}$

해설

$f_1(2) = -\dfrac{1}{3},\ f_2(2) = 2,\ f_3(2) = -\dfrac{1}{3},\ f_4(3) = 2\cdots$

$\Rightarrow f_{2n}(2) = 2,\ f_{2n+1}(2) = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore f_{2007}(2) = -\dfrac{1}{3}$

22. m이 유리수일 때, $\dfrac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}\cdot\sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

23. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $n(A - C) = 0$

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$

③ $n(A \cap C) = n(B)$

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 이면 $A - B = \varnothing,\ B - C = \varnothing$ 이므로

$A \subset B,\ B \subset C$

또, $n(A) = n(C)$, $A \subset C$ 이므로 $A = C$

따라서 $A = B = C$

① $n(A - C) = 0 \rightarrow A = C$ 이므로 옳다.

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \rightarrow 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.

③ $n(A \cap C) = n(B) \rightarrow$ 옳다.

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \rightarrow$ 옳다.

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \rightarrow n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

24. 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 $A\cup B=S,\ A\cap B=\varnothing$ 인 두 집합 $A,\ B$로 분할한다. 또 $f(A)$를 집합 A의 원소의 총합, $f(B)$를 집합 B의 원소의 총합이라 할 때, $f(A)\cdot f(B)$ 의 최댓값을 구하면 ?

① 5　② 10　③ 15　④ 25　⑤ 45

해설

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ A\cup B=S,\ A\cap B=\varnothing$ 이므로, $f(A)+f(B)=1+2+3+4=10$

$$\begin{aligned}\therefore f(A)\cdot f(B) &= f(A)(10-f(A))\\ &= -\{f(A)\}^2+10f(A)\\ &= -\{f(A)-5\}^2+25\end{aligned}$$

$\therefore f(A)\cdot f(B)$ 의 최댓값은 25

25. 임의의 양수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

(가) $f(2) = -3$ (나) 임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(1 \times 2) = f(1) + f(2)$ 에서

$f(1) = 0$ $f(1) = f\left(\frac{1}{2} \times 2\right)$

$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = 3$