1. 다음을 계산하여라.

$$n(\{1,\ 2\}) + n(\{0\}) + n(\varnothing) + n(\{0,\ 1,\ 2\})$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$n(\{1,\ 2\}) = 2,\ n(\{0\}) = 1,\ n(\varnothing) = 0,$
$n(\{0,\ 1,\ 2\}) = 3$
$n(\{1,\ 2\}) + n(\{0\}) + n(\varnothing) + n(\{0,\ 1,\ 2\}) = 6$

2. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여, $B \subset A$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

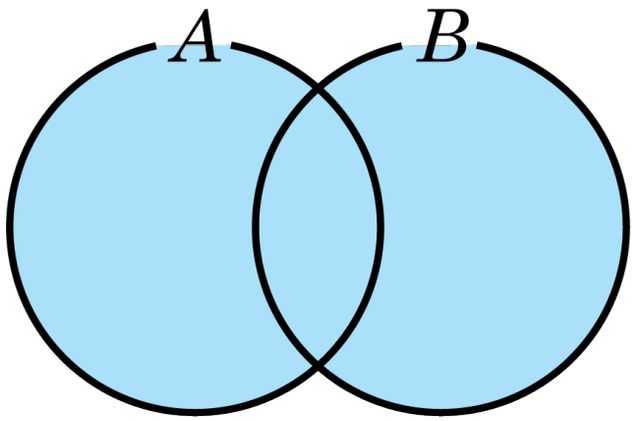
① $A \cap B = B$ ② $B - A = \varnothing$ ③ $A^C \subset B^C$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cap B^C = \varnothing$

해설

⑤ $A \cap B^C = A - B \neq \varnothing$ 이다.

3. 다음 벤 다이어그램에서 $n(B) = 20$, $n(A - B) = 15$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 35 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A \cup B$ 이다.

$A \cup B = (A - B) \cup B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n((A - B) \cup B) \\ &= n(A - B) + n(B) \\ &= 15 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

(개) 이다.

4. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0,\ 1\}$ ③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면$0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

5. 실수 전체의 집합을 R이라 할 때, 다음 중 R에서 R로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

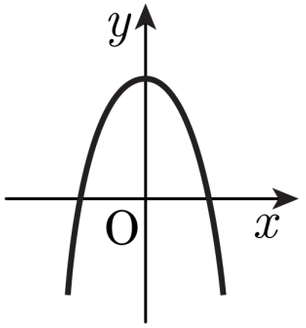
① $y = 0$　② $y = -x + 4$　③ $y = (x-1)^2$

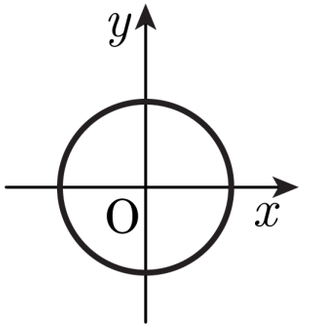
④ $x = y^2 + 4$　⑤ $y = x^3$

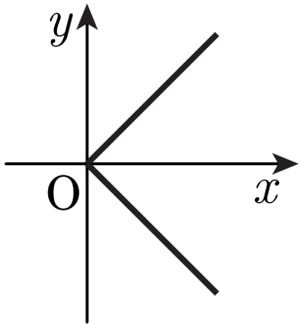
해설

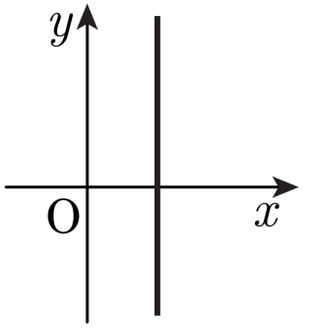
4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$에서 $y = \pm 1$
즉, $x = 5$에 대응하는 y의 값이
-1, 1의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

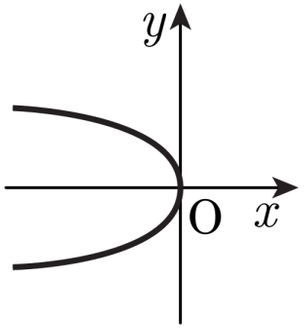
6. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

7. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

8. 다음 함수의 그래프 중 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹치는 것은?

① $y=\frac{2x-1}{x-1}$ ② $y=\frac{2x}{x-1}$ ③ $y=\frac{2x+1}{x-1}$

④ $y=\frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y=\frac{2x}{2x+1}$

해설

① $y=\frac{2x-2+1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$

② $y=\frac{2x-2+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$

③ $y=\frac{2x-2+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$

④ $y=\frac{2x-1+1}{2x-1}=1+\frac{1}{2x-1}$

⑤ $y=\frac{2x+1-1}{2x+1}=1-\frac{1}{2x+1}$

따라서, ① 의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축, y 축 방향으로 각각 1, 2 만큼 평행이동시킨 것이다.

9. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x$는 6의 약수$\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B = \{1, 2\}$

② $A - B = \{3, 6\}$

③ $A - B^c = \{3, 5\}$

④ $A^c - B^c = \{4\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로

③ $A - B^c = \{1, 2\}$ 이다.

10. 정수 전체의 집합 Z의 임의의 두 부분집합 A, B에 대하여 A가 무한집합이고, B가 유한집합일 때, 다음 집합 중 반드시 유한집합이 되는 것의 개수는?

$A \cup B,\ A - B,\ A \cap B,\ B - A,\ Z - A$

① 없다. ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

(무한집합) $\cap$ (유한집합) = (유한집합),
(유한집합) $-$ (무한집합) = (유한집합) 이므로
$A \cap B,\ B - A$는 유한집합이고,
$(A \cap B) \subset B,\ (B - A) \subset B$이다. 예를 들어
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\},\ B = \{0\}$이라 하면
$A \cup B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots\}$,
$A - B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\}$
$A \cap B = \varnothing$,
$B - A = \{0\} - \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\} = \{0\}$,
$Z - A = \{\cdots, -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \cdots\} - \{1,\ 2,\ 3, \cdots\} = \{\cdots, -2,\ -1,\ 0\}$
따라서 유한집합이 되는 것은 $A \cap B,\ B - A$로 2 개뿐이다.

11. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2+2\times(-2)-3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

12. 함수 $f(x)=\begin{cases}2(x\geq 1)\\1(x<1)\end{cases}$ 에서 $y=(f\circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x\geq 1 : y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$

ii) $x<1 : y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$

$\therefore\ y=(f\circ f)(x)=2$

13. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3 ② $\frac{8}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

해설

$\frac{x+1}{x-2}=t$로 놓으면

$x+1=tx-2t,\ (t-1)x=2t+1$

$\therefore\ x=\frac{2t+1}{t-1}$

$f(t)=\frac{3\times\frac{2t+1}{t-1}+4}{\frac{2t+1}{t-1}+1}=\frac{10t-1}{3t}$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3}$

14. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

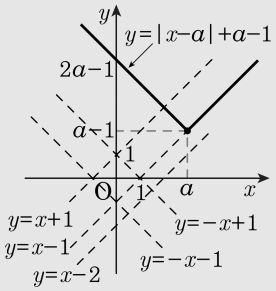
① $y=x+1$ ② $y=x-1$ ③ $y=x-2$

④ $y=-x-1$ ⑤ $y=-x+1$

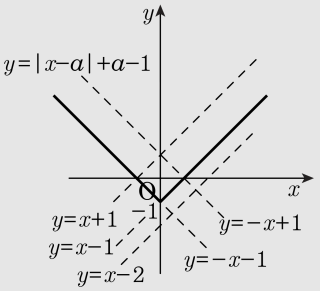
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

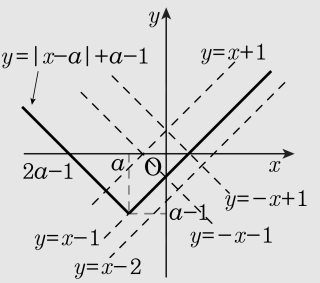
i) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a\le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ii) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



iii) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

15. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

① $\frac{x}{x+1}$ ② $\frac{x+1}{x-1}$ ③ 1 ④ $x - \frac{1}{x}$ ⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$a = bx$ 이므로 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$

또는 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{x+1}{x-1}$

16. 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p,q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y=x+r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p+q+r$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=\frac{-5}{x+4}+2$$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4,2)$ 에 대하여 대칭이고,

점 $(-4,2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y=x+6$ 에 대하여 대칭이다.

$\therefore p=-4\ ,\ q=2\ ,\ r=6$

$\therefore p+q+r=-4+2+6=4$

17. 무리함수 $y = -\sqrt{1-x} + 2$의 역함수는?

① $y = (x-2)^2 + 1 (x \le 2)$ ② $y = (x-2)^2 - 1 (x \le 2)$

③ $y = -(x-2)^2 + 1 (x \le 2)$ ④ $y = -(x-2)^2 - 1 (x \le 2)$

⑤ $y = -(x+2)^2 + 1 (x \le 2)$

해설

$y = -\sqrt{1-x} + 2$에서 $1 - x \ge 0$이므로 $x \le 1$

$y - 2 = -\sqrt{1-x} \le 0$이므로 $y \le 2$

$1 - x = (y-2)^2$, $x = -(y-2)^2 + 1$

x, y를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore y = -(x-2)^2 + 1 (x \le 2)$

18. 집합 $A = \{\varnothing, 1, 3, 5, 7, 9, \{1, 3, 5\}\}$, $B = \{\varnothing, 1, 3, 5, 7, \{1, 3, 5\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 골라라.

㉠ $\varnothing \notin A$	㉡ $7 \subset B$
㉢ $\{1, 3, 5\} \subset B$	㉣ $\{\{1, 3, 5, 7, 9\}\} \in A$
㉤ $A \subset B$	

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

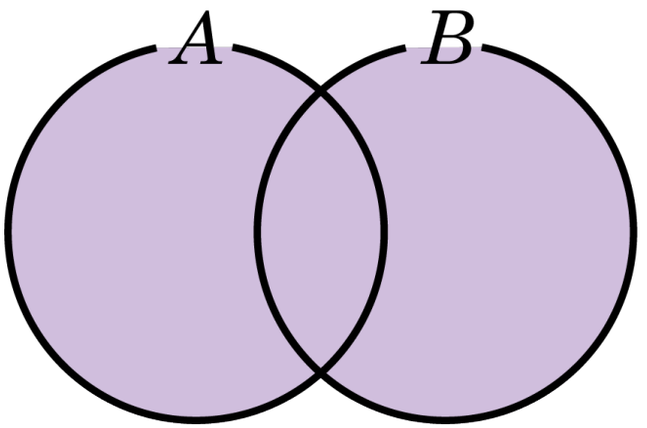
㉠ $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 이고,$\varnothing \notin \varnothing$, $\varnothing \subset \varnothing$ 이다.

㉡ $7 \in B$

㉣ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset A$

㉤ $B \subset A$

19. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 24\}$, $B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
$B = \{4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 96\}$ 이 된다.
색칠한 부분의 원소는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 64,\ 96\}$ 이다.
이때, 가장 큰 원소는 96 이다.

20. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건

③ 아무런 조건관계가 아니다.

④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.

⑤ 필요충분조건

21. $a^2+b^2=2,\ x^2+y^2=2$일 때, $ax+by$의 최댓값과 $ab+xy$의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

i) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

$\therefore\ -2 \leq ax+by \leq 2$

ii) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2},\quad 1 \geq |ab|$

$\therefore\ -1 \leq ab \leq 1$

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2},\quad 1 \geq |xy|$

$\therefore\ -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore\ -2 \leq ab+xy \leq 2$

i), ii) 에서, 최댓값의 합은 4

22. $a+b \le 100$ 이고 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는?

① 1 개 ② 5 개 ③ 7 개 ④ 9 개 ⑤ 13 개

해설

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$$

분모, 분자에 ab 를 곱하면

$$\frac{a^2b+a}{b+ab^2} = \frac{a(ab+1)}{b(1+ab)} = \frac{a}{b} = 13$$

$\therefore\ a = 13b$

$a+b \le 100$ 에 대입하면

$$14b \le 100,\ 0 < b \le \frac{100}{14} < 8$$

따라서 $b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 이므로

$(a,\ b)$ 의 개수는 7 개

23. 집합 $S = \left\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $\frac{1}{x} \in A$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 15 개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ $\Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 15$ (개)

24. $a+b+c=abc=3\sqrt{3}$ 인 세 실수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^4+b^4+c^4$ 의 최솟값은?

① 9 ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ 27 ⑤ 81

해설

A, B, C 가 실수이면

$A^2+B^2+C^2 \geq AB+BC+CA$ 가 성립한다.

$\therefore a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)$

$=abc(a+b+c)$

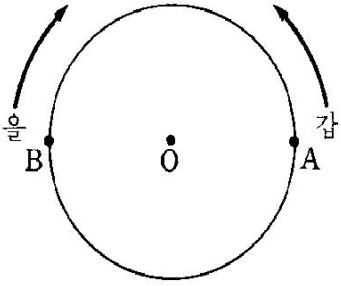
$\therefore a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

$=(3\sqrt{3})^2=27$

등호는 $a^2=b^2=c^2,\ ab=bc=ca$ 일 때,

즉 $a=c$ 일 때 성립. 따라서 최솟값은 27

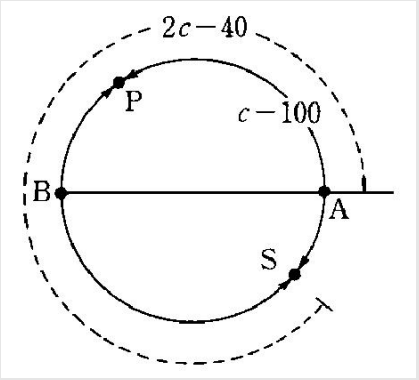
25. 갑, 을 두 사람이 원형 트랙의 반대편 두 지점 A, B 에서 동시에 일정한 속도로 서로 반대 방향으로 출발하였다. 을이 100 m 를 갔을 때 두 사람은 처음 만났고, 갑이 A 지점을 40 m 남겨 두고 두번째 만났다면 트랙 한 바퀴의 둘레의 길이는? (단, 두번째 만날 때까지 두 사람은 아직 트랙을 한 바퀴도 돌지 못했다고 한다.)



① 260 m ② 390 m ③ 520 m

④ 650 m ⑤ 780 m

해설



트랙 둘레의 길이를 $2c$ 라 하고, A, B를 출발점 P, S 를 각각 첫 번째, 두 번째로 만나는 점이라고 하자.

점 P 까지의 갑, 을의 이동 거리는 갑 : $c-100$, 을 : 100

S 까지의 갑, 을의 이동 거리는 갑 : $2c-40$, 을 : $c+40$

문제의 뜻으로부터 두 사람의 이동 속도가 일정하고 P, S 점까지 이동하는 데 걸린 시간이 같으므로

갑, 을의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

시간 : $\dfrac{\text{이동거리}}{\text{속도}}$ 에서

$$\frac{c-100}{v_1}=\frac{100}{v_2}\cdots ㉠$$

$$\frac{2c-40}{v_1}=\frac{c+40}{v_2}\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{c-100}{2c-40}=\dfrac{100}{c+40}$

$(c-100)(c+40)=100(2c-40)$

$c^2-60c-4000=200c-4000$

$c^2-260c=0,\ c(c-260)=0$

$\therefore c\neq 0$ 이므로 $c=260$

따라서 트랙의 길이는 $2c=520$ (m)