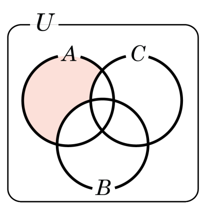
1. 다음 벤 다이어그램에서 어두운 부분을 나타내는 집합은? (단, U는 전체집합, X^c는 X의 여집합을 나타낸다.)



① $A \cap (B \cup C)^C$　　② $A \cup (B \cup C)^C$

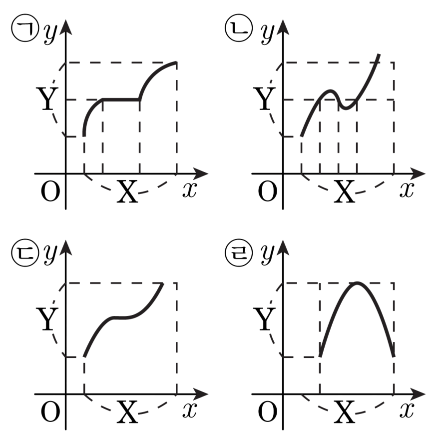
③ $A \cap (B^C \cap C)^C$　　④ $A \cap (B^C \cap C^C)^C$

⑤ $A \cap (B^C \cup C^C)^C$

해설

각각 벤다이어그램을 그려서 확인하면 된다. 모두 그려서 확인하지 않고 주어진 벤다이어그램을 보고 그에 맞는 집합의 연산을 생각해 보면 색칠한 부분은 $A-(B \cup C)$ 임을 알 수 있고 $A-(B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c$ 이다.

2. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

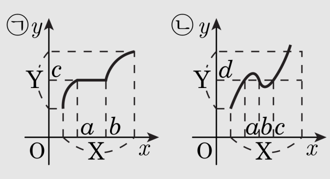


① (ㄱ) (ㄷ)　　② (ㄴ) (ㄹ)　　③ (ㄷ)

④ (ㄱ)　　⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



㉠ $\{x|a \le x \le b\}$에 속하는
x의 상이 모두 c이므로
일대일 대응이 아니다.
㉡ a, b, c의 상이 모두 d이므로
일대일 대응이 아니다.
㉣, ㉡의 경우와 같다.

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f: x \to x+1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$f^2(x) = f(f(x)) = (x+1)+1 = x+2$
$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x+2)+1 = x+3$
$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x+3)+1 = x+4$
$\vdots$
이상에서 $f^n(x) = x+n$ 이므로
$f^{2006}(x) = x+2006$
$\therefore\ f^{2006}(2) = 2+2006 = 2008$

4. $\dfrac{x+1}{x(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\dfrac{x+1}{x(x-1)}=\dfrac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$

따라서, $a+b=1,\ \ a=-1$

$\therefore\ a=-1,\ \ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

5. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{2}{x(x+2)}$ ② $\dfrac{3}{x(x+2)}$

③ $\dfrac{2}{(x+2)(x+3)}$ ④ $\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$

⑤ $\dfrac{3}{x(x+3)}$

해설

$$(\text{준식}) = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{x}-\frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}$$

6. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{98}{99}$ ② $\frac{100}{99}$ ③ $\frac{99}{100}$ ④ $\frac{101}{100}$ ⑤ $\frac{100}{101}$

해설

이항분리 이용

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

7. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{2x+1}{x}$ ② $\dfrac{2x-1}{x}$ ③ $\dfrac{x-1}{x}$

④ $\dfrac{x+1}{x}$ ⑤ $\dfrac{1}{x}$

해설

$$1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}$$

$$=1-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x-1+x}{x}$$

$$=\dfrac{2x-1}{x}$$

8. 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b, \cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

첫째항$=1$, 공비$=a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \frac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

9. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $p \to \sim r$ ③ $q \to r$

④ $r \to p$ ⑤ $r \to \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P$, $Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \to p$, $q \to r$ 등이 참인 명제가 된다.

10. 다음 보기의 $\boxed{}$안에 알맞은 것을 차례로 적으면?

보기

㉠ 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

① 충분, 필요　　② 필요, 충분

③ 필요, 필요　　④ 필요충분, 필요

⑤ 필요충분, 필요충분

해설

㉠ $A \cup C = B \cup C$ $\overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $A = B$ <반례> $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1,\ 2\}$

∴ 필요조건

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$, $(x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ $\overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $x = y = 0$

∴ 필요조건 [반례] $x = 1$, $y = 1$

11. $3a+4b=1$ 일 때, $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}$ 의 최솟값을 구하면?(단, $a>0,\ b>0$)

① 12　　② 24　　③ 36　　④ 48　　⑤ 60

해설

$a>0,\quad b>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$3a+4b=1\geq 2\sqrt{12ab}$

$\frac{1}{2}\geq\sqrt{12ab},\ \frac{1}{48}\geq ab$

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}$

$ab=\frac{1}{48}$ (최대) 일 때 $\sqrt{\frac{12}{ab}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore\ \frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{\frac{1}{48}}}=2\cdot 2\cdot 12=48$

12. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

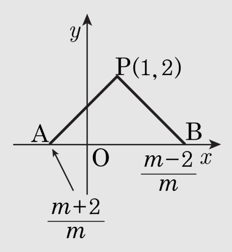
$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$

$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$

13. 직선 $y = m\,|\,x-1\,|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

해설



$y = m\,|\,x-1\,|+2$

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ⅱ) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 $(1,\ 2)$을 지난다.

x절편은 ㉠에서 $x = \frac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = \frac{-4}{m}$

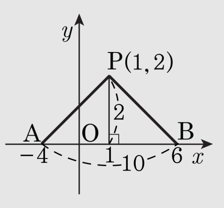
$\therefore$ $\triangle PAB$의 면적이 10이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\frac{2}{5}$

해설



삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m\,|\,x-1\,|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m\,|\,6-1\,|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$

14. 유리식 $\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{3x^2-2x+1}{x^2-1}$을 간단히 하면?

① $-\frac{1}{x-1}$　② $\frac{1}{x-1}$　③ $\frac{1}{x+1}$
④ $\frac{2x}{x+1}$　⑤ 0

해설

$\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{3x^2-2x+1}{x^2-1}$

$=\frac{2x(x-1)+x(x+1)-(3x^2-2x+1)}{x^2-1}$

$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$

15. $a+\frac{1}{b}=1,\ b+\frac{2}{c}=1$ 일 때, $\frac{4}{abc}$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

$a+\frac{1}{b}=1$을 $a=1-\frac{1}{b}\cdots$ ㉠

$b+\frac{2}{c}=1$을 $b=1-\frac{2}{c}\cdots$ ㉡

㉡ 에서 $b=\frac{c-2}{c}\cdots$ ㉢이라 놓으면

㉢ 을 ㉠ 에 대입

$a=1-\frac{1}{\frac{c-2}{c}}=1-\frac{c}{c-2}=\frac{-2}{c-2}$

$abc=\frac{-2}{c-2}\times\frac{c-2}{c}\times c=-2$

$\therefore \frac{4}{abc}=-2$

16. $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{8}=\dfrac{2x+8y-z}{a}$가 성립할 때, a의 값은?

① 2　　② 7　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

가비의 리에 의하여

$$\frac{x+y}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{8}=\frac{p(x+y)+qy+rz}{5p+2q+8r}$$
$$=\frac{2x+8y-z}{a}$$

$px+py+qy+rz=px+(p+q)y+rz$
$=2x+8y-z$에서

$p=2,\ q=6,\ r=-1$

$\therefore a=5p+2q+8r=5\times2+2\times6+8\times(-1)=14$

$\therefore a=14$

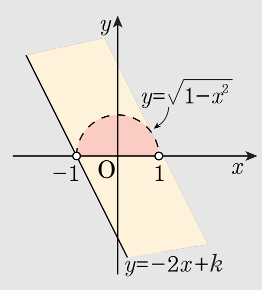
17. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y < \sqrt{1 - x^2}\}$, $B = \{(x, y) \mid 2x + y > k\}$ 에서 $A \cap B = A$ 가 되게 하는 k 의 범위를 구하면?

① $k \leq -2$ ② $k < -2$ ③ $k > -2$

④ $k \geq -2$ ⑤ $k \neq -2$

해설

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로
그림을 그려 부등식의 영역으로 표시하면
집합 B 에서 $y > -2x + k$ 이므로
점 $(-1,\ 0)$ 를 지날 때, $k = -2$ 이다.
따라서, $A \subset B$ 이려면 $k \leq -2$



18. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

19. 두 집합 $A = \{x | x$는 100 이하인 6의 배수$\}$, $B = \{x | 3 \le x < 20$인 홀수$\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{6,\ 12,\ 18,\ \ldots,\ 96\}$,
$B = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17, 19\}$ 이므로
$n(A) = 16,\ n(B) = 9$
$\therefore 16 - 9 = 7$

20. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

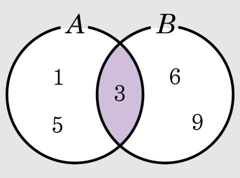
21. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{x \mid x\text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$일 때, 집합 B를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\{3,\ 6,\ 9\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}$이고, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{3, 6, 9\}$이다.

22. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 15 이하의 홀수$\}$에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$, $B = \{7,\ 13\}$일 때, 다음 보기에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

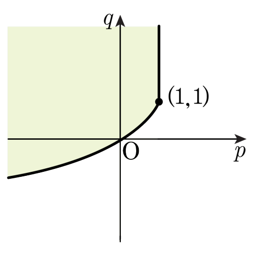
▶ 답 :

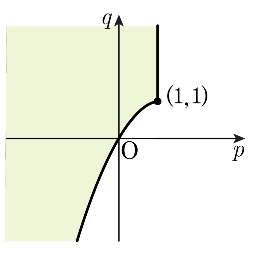
▷ 정답 : ㉡

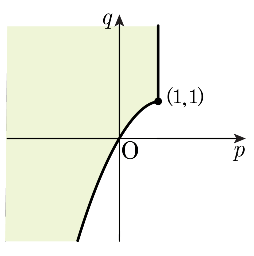
해설

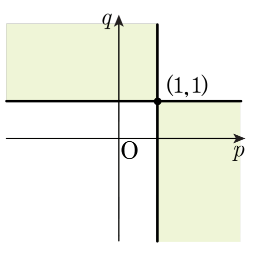
$U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$,
$A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$, $B = \{7,\ 13\}$
㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 11\}$
㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$
㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$
㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

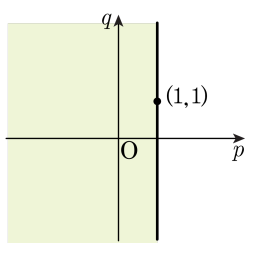
23. 좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프가 도형 $A = \{(x, y) \mid x = 1$이고$y \geq 1\}$과 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, 점 (p, q)가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)

①


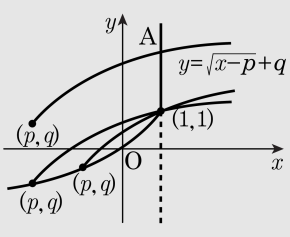
②


③


④


⑤


해설



무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프는 점 (p, q) 에서 시작하여 오른쪽 위로 증가하는 곡선이다.
곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$ 가 반드시 반직선 A와 만나기 위해서는 점 (p, q)가 직선 $x = 1$의 왼쪽에 놓여야 한다.
$\therefore\ p \leq 1 \cdots$ ㉠
또한, 곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 반직선 A와 한 점에서 만나는 경우 중 가장 아래쪽에 놓일 때는
곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 점 $(1, 1)$을 지날 때이다.
점 $(1, 1)$을 지나는 경우는 $1 = \sqrt{1-p}+q$에서 $q = 1-\sqrt{1-p}$
$\therefore\ q \geq 1-\sqrt{1-p} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 구하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

24. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n\left\{2 \cdot 5 + (n-1)4\right\}}{2} = n(2n+3)$$

$$\therefore\ b_n = \frac{n(2n+3)}{n} = 2n + 3(\text{단}, n \neq 0)$$

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $b_1 = 2 + 3 = 5$이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$인 등차수열이다.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \frac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$$

25. 정의역과 공역이 모두 자연수의 집합인 함수 $f(n)$ 이 있다. $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 이고, $f(7) = 21$ 일 때, $f(9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 라고하면 $f(3) = a + b$
$f(4) = a + 2b$
$f(5) = 2a + 3b$
$f(6) = 3a + 5b$
$f(7) = 5a + 8b = 21$ 을 만족하는 자연수는
$\therefore\ a = 1,\ b = 2$
$f(8) = 8a + 13b$
$f(9) = 13a + 21b = 13 + 42 = 55$

26. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 다음 중 함수 $f(2x)$ 의 역함수는?

① $g(2x)$ ② $g\left(\frac{1}{2}x\right)$ ③ $\frac{1}{2}g(x)$
④ $\frac{1}{2}g(2x)$ ⑤ $2g\left(\frac{1}{2}x\right)$

해설

$h(x) = 2x$ 라고 하면
$f(2x) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$
한편, $(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$ 이고,
$f^{-1}(x) = g(x),\ h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ h)^{-1}(x) &= \left(h^{-1} \circ f^{-1}\right)(x) \\ &= h^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= h^{-1}(g(x)) \\ &= \frac{1}{2}g(x)\end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}(2x) = (f \circ h)^{-1}(x) = \frac{1}{2}g(x)$