

1. 다음 중 두 집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 인 것을 고르면?

① $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 4, 8\}$

② $A = \{x|x \text{는 짝수}\}, B = \{x|x \text{는 홀수}\}$

③ $A = \emptyset, B = \{x|x \text{는 } x, y, z\}$

④ $A = \{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}, B = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$

⑤ $A = \{x|x = 2 \times n - 1, n = 1, 2, 3, \dots\}, B = \{x|x \text{는 자연수}\}$

해설

④ $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \supset \{6, 12, 18, 24, \dots\}$

4. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0, q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

5. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

- ① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

6. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

- ① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + b) \\ &= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4 \\ \text{그런데, 이것은 } x \text{ 에 대한 항등식이므로} \\ a &= -2, b = 2 \\ \therefore ab &= -4\end{aligned}$$

7. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

8. 다음 보기 중 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{x}{x+1}$ ㉡ $y = \frac{2-x}{x-1}$ ㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이다.

$$\textcircled{1} y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1$$

$$\textcircled{2} y = \frac{2-x}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1$$

$$\textcircled{3} y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 2$$

따라서, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

9. 분수함수 $y = \frac{2x-3}{x+2}$ 의 역함수를 구하면?

- ① $y = \frac{2x+3}{x-2}$ ② $y = \frac{2x-3}{x-2}$ ③ $y = \frac{-2x+3}{x-2}$
④ $y = \frac{-2x-3}{x-2}$ ⑤ $y = \frac{2x-3}{x+2}$

해설

$y = \frac{2x-3}{x+2}$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x+2) = 2x-3, (y-2)x = -2y-3,$$

$$x = \frac{-2y-3}{y-2}$$

x 와 y 를 바꾸면, $y = \frac{-2x-3}{x-2}$

따라서 구하는 역함수는 $y = \frac{-2x-3}{x-2}$

10. 함수 $y = \sqrt{-2x-2} - 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

- ① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{-2x-2} - 2 = \sqrt{-2(x+1)} - 2$ 의
그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축 방향으로 -2만큼
평행이동한 것이다.
 $\therefore m+n = -1-2 = -3$

11. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 이다.'는 참이고, '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이다.'는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-4 \leq k \leq -1$ ② $1 \leq k \leq 4$ ③ $-1 \leq k < 1$
④ $1 < k \leq 4$ ⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$
 $\therefore 1 < k \leq 4$

12. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R 는 실수 전체의 집합이다.)

- ① 항등함수는 일대일 대응이다.
- ② $f: R \rightarrow R$ 가 항등함수이면 $f(x) = x$ 이다.
- ③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$ 가 된다.
- ④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.
- ⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

- ③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$ 이다.
(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = x$ 에서
 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 이면
 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 가 아니다.
 - ④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 무수히 많다.
 - ⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = 3$ 에서
 $X = \{1, 2, 3\}$ 이면 $y = f(x)$ 는 직선이 아니다.
- 따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

13. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$

㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠

▶ 정답: ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로 역함수를 갖는다.

㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면 $x = -1, 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다. 따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면 $x = \pm 2$ 이므로 일대일 대응이 아니다. 따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다.

이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.

㉤ $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0$$
 이므로

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

㉥ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

14. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = bx + c$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 1$, $g^{-1}(1) = 2$ 이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$g^{-1}(1) = 2 \text{ 에서 } g(2) = 1$$

$$g(2) = 2b + c = 1 \cdots \text{㉠}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + a = bx + c + a \\ = 2x - 1 \text{ 이고}$$

모든 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$b = 2 \cdots \text{㉡}$$

$$c + a = -1 \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립으로 풀면

$$a = 2, b = 2, c = -3$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 2 + (-3) = 1$$

15. 다음 식이 성립하는 실수 x 의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$ 가 성립되지 않는 범위는 $x+1 < 0$ 이고 $x-2 < 0$

$\therefore x < -1$

따라서 $x < -1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x < -1\}$ 의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$ 이고 실수 x 의 최솟값은 $\therefore -1$

16. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 제 50항의 값은?

2, 7, 12, 17, 22...

- ① 227 ② 237 ③ 247 ④ 257 ⑤ 267

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인
등차수열이므로 $a_n = 5n - 3$
 $\therefore a_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

17. 두 수 3과 7의 등차중항을 a , 10과 -2의 등차중항을 b 라 할 때, 이차 방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차는?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$3 \text{과 } 7 \text{의 등차중항은 } a = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$10 \text{과 } -2 \text{의 등차중항은 } b = \frac{10+(-2)}{2} = 4$$

$$x^2 + ax + b = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0, (x+1)(x+4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -4$$

따라서 두 근의 차는 3

18. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$\begin{aligned} S_{10} &= a_{11} \\ S_{10} &= \frac{10(2a+9d)}{2} \\ a_{11} &= a+10d \\ \frac{10(2a+9d)}{2} &= 10a+45d \\ 10a+45d &= a+10d \\ 9a &= -35d \\ a &= 35 \circlearrowleft \text{므로 } d = -9 \\ \therefore S_{10} &= \frac{10(2a+9d)}{2} \\ &= \frac{10(70-81)}{2} \\ &= \frac{-110}{2} = -55 \end{aligned}$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 $a_3+a_6+a_9=9$, $a_6+a_7+a_8+\dots+a_{14}=99$ 일 때, $a_k=15$ 를 만족하는 k 의 값은?

- ① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_6 + a_9 = 9 \text{에서}$$

$$(a + 2d) + (a + 5d) + (a + 8d) = 9$$

$$3a + 15d = 9 \quad \therefore a + 5d = 3 \cdots \text{㉠}$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{14} = 99 \text{에서}$$

$$\frac{9\{(a + 5d) + (a + 13d)\}}{2} = 99$$

$$\therefore a + 9d = 11 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } d = 2, a = -7$$

$$\therefore a_n = -7 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 9$$

$$\text{따라서 } a_k = 2k - 9 = 15 \text{에서}$$

$$2k = 24 \quad \therefore k = 12$$

20. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 4, 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8(\text{개})$ 이다.

21. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20\text{미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 18\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

$B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

22. 두 집합 $A = \{-1, 0, 2 \times a - 5, 5\}$, $B = \{0, b + 3, 3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{0, 3\}$ 이기 위한 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A \cap B = \{0, 3\}$ 이므로 $3 \in A$,

$2 \times a - 5 = 3, a = 4$

$A = \{-1, 0, 3, 5\}$, $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$ 이므로 $2 \in B$,

$b + 3 = 2, b = -1$

$\therefore a + b = 3$

23. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.’이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
 $n = (가) 또는 n = (나)$ (단, k 는 음이 아닌 정수)로 가정할 수 있다.
 (i) $n = (가)$ 일 때
 $n^2 = 3(다) + 1$
 (ii) $n = (나)$ 일 때
 $n^2 = 3(라) + 1$
 이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
 (i), (ii)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

- ① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$
 ② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$
 ③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$
 ④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$
 ⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3의 배수가 아닌 수들은 3으로 나뉘서 1 또는 2가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
 제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1인 자연수가 된다.
 따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

24. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 3 : 4 이고, 합격자의 수의 비는 5 : 6, 불합격자의 수의 비는 5 : 8이다. 이 대학의 수학과와 경쟁률을 구하면?

- ① 10 : 3 ② 5 : 3 ③ 4 : 1 ④ 5 : 2 ⑤ 4 : 3

해설

영문과 합격자 수를 5α 라 하면,

수학과 합격자 수는 6α

영문과 불합격자 수를 5β 라 하면,

수학과 합격자 수는 8β

$$\therefore (5\alpha + 5\beta) : (6\alpha + 8\beta) = 3 : 4$$

$$\Rightarrow 18\alpha + 24\beta = 20\alpha + 20\beta$$

$$\therefore \alpha = 2\beta$$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률} = \frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}} = \frac{6\alpha + 8\beta}{6\alpha}$$

$$= \frac{10\alpha}{6\alpha} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 5 : 3$$

25. 집합 $A = \{1, 2 \times a, a + 2\}$, $B = \{a, 2 \times a - 2, 2 \times a - 7\}$ 이고 $A - B = \{8\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A \cap C) \cup (B - C)$ 는?

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{1, 4, 6\}$
④ $\{2, 5, 6\}$ ⑤ $\{2, 6, 8\}$

해설

$A - B = \{8\}$ 이므로

(1) $2 \times a = 8$ 일 때, $a = 4$ 이다.

이 때 $A = \{1, 6, 8\}$, $B = \{1, 4, 6\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로
 $(A \cap C) \cup (B - C) = \{1\} \cup \{4, 6\} = \{1, 4, 6\}$ 이다.

(2) $a + 2 = 8$ 일 때, $a = 6$ 이다.

이 때 $A = \{1, 8, 12\}$, $B = \{5, 6, 10\}$ 이므로 $A - B = \{1, 8, 14\} \neq \{8\}$
이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1), (2) 에서 $(A \cap C) \cup (B - C) = \{1, 4, 6\}$ 이다.