1. 다음 중 두 집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 인 것을 고르면?

① $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$

② $A = \{x | x \text{는 짝수}\}$, $B = \{x | x \text{는 홀수}\}$

③ $A = \varnothing$, $B = \{x | x \text{는 } x,\ y,\ z\}$

④ $A = \{x | x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 6\text{의 배수}\}$

⑤ $A = \{x | x = 2 \times n - 1,\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$, $B = \{x | x \text{는 자연수}\}$

해설

④ $\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} \supset \{6, 12, 18, 24, \cdots\}$

2. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5\}$ 에서 $A \cap X = X$, $B \cup X = B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$,

$B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 이므로

$X \subset A \cap B = \{3,\ 4\}$

집합 X 는 $\{3,\ 4\}$ 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)

3. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q이기 위한 필요조건, r 은 q이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요 ② 충분

③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

4. $q > p > 1$인 실수 p, q에 대하여 $pq + p$와 $p^2 + q$의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p-1) - p(p-1) \\ &= (p-1)(q-p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$이므로 $p - 1 > 0$, $q - p > 0$

따라서 $(p-1)(q-p) > 0$이므로

$pq + p > p^2 + q$

5. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

6. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$

$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$a = -2, b = 2$

$\therefore ab = -4$

7. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.

㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.

㉢ 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ 이므로,
$f \circ f^{-1} : Y \to Y, f^{-1} \circ f : X \to X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

8. 다음 보기 중 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=\dfrac{x}{x+1}$	㉡ $y=\dfrac{2-x}{x-1}$	㉢ $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y=\dfrac{1}{x-p}+q$ 의 꼴이다.

㉠ $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1}+1$

㉡ $y=\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$

㉢ $y=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$

따라서, 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

9. 분수함수 $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$ ② $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ ③ $y = \dfrac{-2x+3}{x-2}$

④ $y = \dfrac{-2x-3}{x-2}$ ⑤ $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$

해설

$y = \dfrac{2x-3}{x+2}$ 에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+2) = 2x-3,\ (y-2)x = -2y-3,$

$x = \dfrac{-2y-3}{y-2}$

x와 y를 바꾸면, $y = \dfrac{-2x-3}{x-2}$

따라서 구하는 역함수는 $y = \dfrac{-2x-3}{x-2}$

10. 함수 $y = \sqrt{-2x-2}-2$의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $m+n$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{-2x-2}-2 = \sqrt{-2(x+1)}-2$의
그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 -2만큼
평행이동한 것이다.
$\therefore m+n = -1-2 = -3$

11. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \ge k$ 이다.' 는 참이고, '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \le 1$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \le k \le -1$　② $1 \le k \le 4$　③ $-1 \le k < 1$

④ $1 < k \le 4$　⑤ $-4 \le k \le 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \ge k$ 가 참이므로 $k \le 4$
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \le 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$
$\therefore\ 1 < k \le 4$

12. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R는 실수 전체의 집합이다.)

① 항등함수는 일대일 대응이다.

② $f : R \rightarrow R$가 항등함수이면 $f(x) = x$이다.

③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$가 된다.

④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.

⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$이다.
(반례) $f : X \rightarrow Y,\ f(x) = x$에서
$X = \{1,\ 2,\ 3\},\ Y = \{1,\ 2,\ 3\}$이면
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$가 아니다.

④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 무수히 많다.

⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f : X \rightarrow Y,\ f(x) = 3$에서
$X = \{1,\ 2,\ 3\}$이면 $y = f(x)$는 직선이 아니다.

따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

13. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$ ㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$ ㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.
㉡ $y =| x - 2 |$ 에서 $y = 1$ 이면
$x = -1,\ 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.
㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
$x = \pm 2$ 이므로 일대 일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함 수를 갖지 않는다.
㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.
이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.
㉮ $x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0$ 이므로
$f(x_1) \neq f(x_2)$
㉯ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

14. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = bx + c$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 1$, $g^{-1}(1) = 2$ 이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g^{-1}(1) = 2$ 에서 $g(2) = 1$

$g(2) = 2b + c = 1 \cdots$ ㉠

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + a = bx + c + a$

$= 2x - 1$ 이고

모든 x 에 대하여 성립해야 하므로

$b = 2 \cdots$ ㉡

$c + a = -1 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립으로 풀면

$a = 2$, $b = 2$, $c = -3$

$\therefore \quad a + b + c = 2 + 2 + (-3) = 1$

15. 다음 식이 성립하는 실수 x의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$가 성립되지 않는 범위는

$x+1<0$ 이고 $x-2<0$

$\therefore\ x<-1$

따라서 $x<-1$일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x<-1\}$의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$이고 실수 x의 최솟값은 $\therefore\ -1$

16. 다음 수열 $\{a_n\}$의 제 50항의 값은?

$2, 7, 12, 17, 22\cdots$

① 227　② 237　③ 247　④ 257　⑤ 267

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인
등차수열이므로 $a_n = 5n - 3$
$\therefore a_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

17. 두 수 3과 7의 등차중항을 a, 10과 -2의 등차중항을 b라 할 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 차는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

3과 7의 등차중항은 $a=\dfrac{3+7}{2}=5$

10과 -2의 등차중항은 $b=\dfrac{10+(-2)}{2}=4$

$x^2+ax+b=0$에서

$x^2+5x+4=0,\ (x+1)(x+4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-4$

따라서 두 근의 차는 3

18. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$이므로 $d = -9$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = \frac{10(70-81)}{2} = \frac{-110}{2} = -55$$

19. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 $a_3+a_6+a_9=9$, $a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$일 때, $a_k=15$를 만족하는 k의 값은?

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_6+a_9=9$에서

$(a+2d)+(a+5d)+(a+8d)=9$

$3a+15d=9 \quad \therefore\ a+5d=3 \cdots$ ㉠

$a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$에서

$$\frac{9\left\{(a+5d)+(a+13d)\right\}}{2}=99$$

$\therefore\ a+9d=11 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=2,\ a=-7$

$\therefore\ a_n=-7+(n-1)\cdot 2=2n-9$

따라서 $a_k=2k-9=15$에서

$2k=24 \quad \therefore\ k=12$

20. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A = \{1,\ 4,\ 5,\ 7, 8\}$, $A \cap B = \{1,\ 4,\ 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7 을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8$(개) 이다 .

21. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1,\ n$은 자연수$\}$, $B = \{x \mid$ x는 20미만의 소수$\}$, $C = \{x \mid x$는 18의 약수$\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \cdots\} = \{1, 3, 5, \cdots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

$B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

22. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 2\times a-5,\ 5\}$, $B=\{0,\ b+3,\ 3\}$ 에 대하여 $A\cup B=\{-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $A\cap B=\{0,\ 3\}$ 이기 위한 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A\cap B=\{0,\ 3\}$ 이므로 $3\in A$,

$2\times a-5=3$, $a=4$

$A=\{-1,\ 0,\ 3,\ 5\}$, $A\cup B=\{-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 이므로 $2\in B$,

$b+3=2,\ b=-1$

$\therefore a+b=3$

23. 다음은 '자연수 n 에 대하여, n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

> 대우는 '자연수 n 에 대하여, n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다.' 이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3 으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
> $n=($ 가 $)$ 또는 $n=($ 나 $)$ (단, k는 음이 아닌 정수)
> 로 가정할 수 있다.
> (ⅰ) $n=($ 가 $)$ 일 때
> $n^2=3($ 다 $)+1$
> (ⅱ) $n=($ 나 $)$ 일 때
> $n^2=3($ 라 $)+1$
> 이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$

② $3k-1,\ 3k-2,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$

③ $3k+2,\ 3k+1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$

④ $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$

⑤ $3k+1,\ 3k+2,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 1$

해설

3 의 배수가 아닌 수들은 3 으로 나눠서 1 또는 2 가 남아야 하므로 $3k+1$ 또는 $3k+2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2+2k)$, $(3k^2+4k+1)$ 가 되고, 나머지가 1 인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

24. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 3 : 4이고, 합격자의 수의 비는 5 : 6, 불합격자의 수의 비는 5 : 8이다. 이 대학의 수학과의 경쟁률을 구하면?

① 10 : 3　② 5 : 3　③ 4 : 1　④ 5 : 2　⑤ 4 : 3

해설

영문과 합격자 수를 5α라 하면,
수학과 합격자 수는 6α
영문과 불합격자 수를 5β라 하면,
수학과 합격자 수는 8β

$\therefore\ (5\alpha+5\beta):(6\alpha+8\beta)=3:4$

$\Rightarrow\ 18\alpha+24\beta=20\alpha+20\beta$

$\therefore\ \alpha=2\beta$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률}=\frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}}=\frac{6\alpha+8\beta}{6\alpha}=\frac{10\alpha}{6\alpha}=\frac{5}{3}$$

$\Rightarrow\ 5:3$

25. 집합 $A=\{1, 2\times a, a+2\}$, $B=\{a, 2\times a-2, 2\times a-7\}$ 이고 $A-B=\{8\}$ 일 때, $C=\{1,2,3\}$ 에 대하여 $(A\cap C)\cup(B-C)$ 는?

① $\{1,3\}$　② $\{1,5\}$　③ $\{1,4,6\}$

④ $\{2,5,6\}$　⑤ $\{2,6,8\}$

해설

$A-B=\{8\}$ 이므로

(1) $2\times a=8$ 일 때, $a=4$ 이다.

이 때 $A=\{1,6,8\}$, $B=\{1,4,6\}$ 이고 $C=\{1,2,3\}$ 이므로

$(A\cap C)\cup(B-C)=\{1\}\cup\{4,6\}=\{1,4,6\}$ 이다.

(2) $a+2=8$ 일 때, $a=6$ 이다.

이 때 $A=\{1,8,12\}$, $B=\{5,6,10\}$ 이므로 $A-B=\{1,8,14\}\neq\{8\}$

이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1),(2) 에서 $(A\cap C)\cup(B-C)=\{1,4,6\}$ 이다.