

1. 모서리의 길이가 모두 $2\sqrt{3}$ 인 정사각뿔 P-ABCD 의 밑면의 대각선의 교점에서 옆면 ABP 에 내린 수선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

\overline{AB} 의 중점을 M, 밑면의 대각선의 교점을 Q, 점 Q 에서 옆면 ABP 에 내린 수선의 발을 R 이라 하면

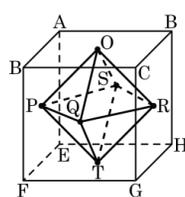
$$\overline{MP} = 3, \overline{MQ} = \sqrt{3}, \overline{PQ} = \sqrt{6}$$

또한, 점 R 은 \overline{PM} 위에 있으므로 $\overline{PM} \perp \overline{QR}$ 이다.

$$\Delta PMQ = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{QR}$$

따라서 $\overline{QR} = \sqrt{2}$ 이다.

2. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12cm 인 정육면체에서 각 면의 대각선의 교점을 연결하여 만든 정팔면체 OPQRST의 부피를 구하여라.



▶ 답: $\underline{\hspace{1cm}} \text{cm}^3$

▷ 정답: 288cm^3

해설

정팔면체의 한 모서리의 길이는 $6\sqrt{2}\text{cm}$ 이고 정사각뿔 O-PQRS의 높이는 6cm 이므로 (정팔면체의 부피)

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times 6 \right) = 288 \text{ (cm}^3\text{)}$$

3. 밑면은 넓이가 12 인 정사각형이고, 옆면은 4 개의 정삼각형인 사각뿔 P - ABCD 가 있다. 점 P 에서 밑면에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q 에서 옆면 ABP 에 내린 수선의 발을 R 이라 할 때, 선분 QR 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

정사각뿔의 한 모서리의 길이는 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

점 Q 는 밑면의 대각선의 교점이다.

AB 의 중점을 M 이라 할 때,

$$\overline{MQ} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3,$$

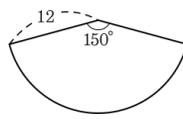
$$\overline{PQ} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

점 R 은 \overline{PM} 위에 있으므로 $\overline{PM} \perp \overline{QR}$ 이다.

$$\begin{aligned} \Delta PMQ &= \frac{1}{2} \times \overline{MQ} \times \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{QR} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{QR} = \sqrt{2}$ 이다.

4. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 12 이고 중심각의 크기가 150° 인 부채꼴을 옆면으로 하는 원뿔을 만들 때, 이 원뿔의 높이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{119}$

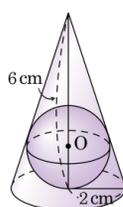
해설

밑면의 반지름의 길이를 r 이라 하면
(부채꼴의 호의 길이) = (밑면의 둘레의 길이)
이므로

$$2\pi \times 12 \times \frac{150^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times r \quad \therefore r = 5$$

$$(\text{원뿔의 높이}) = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119}$$

6. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2 cm, 높이가 6 cm 인 원뿔에 내접하는 구가 있다. 원뿔의 꼭짓점으로부터 구의 중심에 이르는 거리를 구하여라.



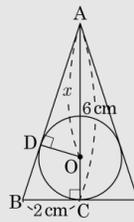
▶ 답: cm

▷ 정답: $\frac{20 - 2\sqrt{10}}{3}$ cm

해설

원뿔의 꼭짓점을 지나고 밑면에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{6^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \text{ (cm)} \\ \overline{OD} &= \overline{OC} = 6 - x \end{aligned}$$



$\triangle ABC \sim \triangle AOD$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{AO} = \overline{BC} : \overline{OD}$$

$$2\sqrt{10} : x = 2 : (6 - x)$$

$$2x = 2\sqrt{10}(6 - x)$$

$$2x = 12\sqrt{10} - 2\sqrt{10}x$$

$$(2\sqrt{10} + 2)x = 12\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{12\sqrt{10}}{2\sqrt{10} + 2} \\ &= \frac{6\sqrt{10}(\sqrt{10} - 1)}{(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 1)} \\ &= \frac{6\sqrt{10}(\sqrt{10} - 1)}{6\sqrt{10}(\sqrt{10} - 1)} \\ &= \frac{10 - 1}{2\sqrt{10}(\sqrt{10} - 1)} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{10}(\sqrt{10} - 1)} \\ &= \frac{20 - 2\sqrt{10}}{3} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

7. 가로, 세로, 높이가 각각 2, 2, 4 인 직육면체의 꼭짓점 중 세 점을 골라 삼각형을 만들 때, 가장 긴 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 삼각형은 몇 개 만들 수 있는지 구하여라.

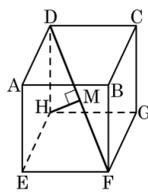
▶ 답: 개

▷ 정답: 24 개

해설

- (i) 세 변의 길이가 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ 인 이등변삼각형
: 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 변은 윗면과 아랫면에서 각각 2 개씩, 모두 4 개가 생기고, 그 각각의 경우에 대하여 2 개씩의 삼각형이 만들어지므로 모두 $4 \times 2 = 8$ (개)
- (ii) 세 변의 길이가 2, 4, $2\sqrt{5}$ 인 직각삼각형
: 옆면은 모두 4 개이고, 각각의 옆면에 대하여 삼각형은 4 개씩 생기므로 만들 수 있는 삼각형은 모두 $4 \times 4 = 16$ (개)
- (iii) 세 변의 길이가 2, $2\sqrt{5}$, $(\sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6})$ 인 삼각형
: 그런데 이 경우는 가장 긴 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 가 아니라 $2\sqrt{6}$ 이므로 조건에 맞는 삼각형을 만들 수 없다.
- 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 $8 + 16 = 24$ (개)이다.

8. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6 cm 인 정육면체에서 꼭짓점 H에서 대각선 DF에 내린 수선 HM의 길이를 구하여라.

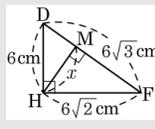


▶ 답: cm

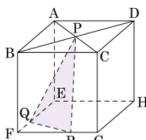
▶ 정답: $2\sqrt{6}$ cm

해설

$$\begin{aligned} \overline{HF} &= \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)} \\ \overline{DF} &= \sqrt{6^2 + (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)} \\ 6 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} &= 6\sqrt{3} \times x \times \frac{1}{2} \\ \therefore x &= 2\sqrt{6} \text{ (cm)} \end{aligned}$$



9. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체에서 면 ABCD의 대각선의 교점을 P, 모서리 EF와 FG를 각각 2:1로 내분하는 점들 Q, R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{286 - 24\sqrt{10}}$

해설

점 P에서 \overline{QR} 에 내린 수선의 발을 S라 할 때,

$$\overline{QF} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$\overline{FR} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

$$\therefore \overline{QR} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{FS} \times \overline{QR} = \overline{FQ} \times \overline{FR} \text{ 에서 } \overline{FS} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PS} = \sqrt{6^2 + \left(3\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{286 - 24\sqrt{10}}{5}}$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{286 - 24\sqrt{10}}{5}} = \sqrt{286 - 24\sqrt{10}}$$

이다.